

# 微積分精華版[第九版]

## 1.2

### 絕對值和實數線上的距離

## 1.2 絕對值和實數線上的距離

### 學習目標

- 求實數的絕對值，並了解絕對值的性質。
- 求實數線上兩點的距離。
- 定義實數線上的區間。
- 使用區間做為現實生活問題的模型並求解，以及求區間的中點。

# 實數的絕對值

## 絕對值的定義

實數  $a$  的絕對值 (absolute value) 即

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{若 } a \geq 0 \\ -a, & \text{若 } a < 0 \end{cases}$$

- 由定義乍看之下，一個實數的絕對值可以為負，但這是不可能的。例如，令  $a = -3$ ，則因為  $-3 < 0$ ，可得

$$|a| = |-3| = -(-3) = 3$$

下列的性質可用於絕對值的運算。

# 實數的絕對值

## 絕對值的性質

1. 乘法： $|ab| = |a||b|$
2. 除法： $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$
3. 次方： $|a^n| = |a|^n$
4. 平方根： $\sqrt{a^2} = |a|$

# 實數的絕對值

- 上列的第四個性質必須特別注意，在代數運算時常犯的錯誤是，一個數平方後再開平方根會得到原數，這種情形只有原數為非負數才能成立。例如，如果  $a = 2$ ，則

$$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$$

但是如果  $a = -2$ ，則

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

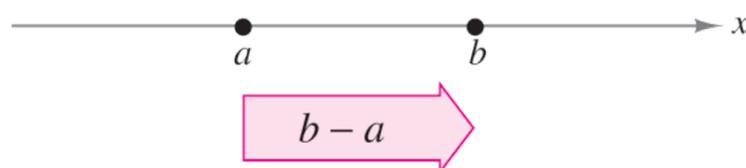
因為由定義知，平方根的符號  $\sqrt{\quad}$  僅是表示非負數根。

# 實數線上的距離

- 考慮實數線上的兩個相異點，如圖 1.9 所示。

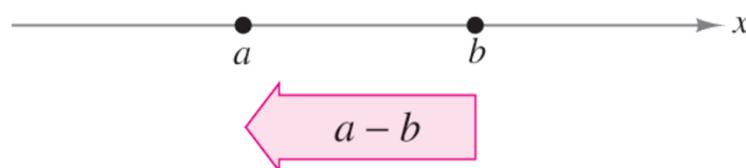
1. 從  $a$  到  $b$  的有向距離是  $b - a$

從  $a$  到  $b$  的有向距離：



2. 從  $b$  到  $a$  的有向距離是  $a - b$

從  $b$  到  $a$  的有向距離：



3.  $a$  和  $b$  之間的距離是  $|a - b|$  或  $|b - a|$

$a$  和  $b$  之間的距離：

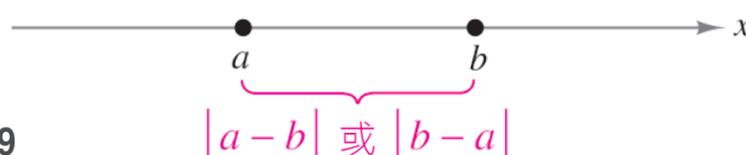


圖 1.9

# 實數線上的距離

- 在圖 1.9 中，因為  $b$  在  $a$  的右邊，所以從  $a$  到  $b$  (往右移動) 的有向距離是正的。且因為  $a$  在  $b$  的左邊，所以從  $b$  到  $a$  (往左移動) 的有向距離是負的。在實數線上兩點間的距離絕不會是負的。

# 實數線上的距離

## 實數線上兩點間的距離

實數線上  $x_1$  和  $x_2$  之間的距離  $d$  定義為

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

- 注意在相減的運算中， $x_1$  和  $x_2$  的順序是不影響運算結果的，因為

$$|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2| \quad \text{且} \quad (x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$$

## 範例 1 求實數線上的距離

- 求實數線上  $-3$  和  $4$  之間的距離。從  $-3$  到  $4$  的有向距離為何？從  $4$  到  $-3$  的有向距離為何？

# 範例 1 求實數線上的距離 (解)

- $-3$  和  $4$  之間的距離為

$$|-3-4| = |-7| = 7 \quad \text{或} \quad |4-(-3)| = |7| = 7 \quad |a-b| \text{ 或 } |b-a|$$

如圖 1.10 所示。



圖 1.10

- 從  $-3$  到  $4$  的有向距離是

$$4 - (-3) = 7 \quad b - a$$

從  $4$  到  $-3$  的有向距離是

$$-3 - 4 = -7 \quad a - b$$

# 檢查站 1

- 求實數線上  $-2$  和  $6$  之間的距離。從  $-2$  到  $6$  的有向距離為何？從  $6$  到  $-2$  的有向距離為何？

## 範例 2 在實數線上定義區間

- 求實數線上所有與 3 的距離不超過 2 個單位實數所形成的區間。

## 範例 2 在實數線上定義區間（解）

- 令  $x$  是所求區間的任一點，接著要找出所有值，使得在  $x$  和 3 之間的距離不超過 2，可得

$$|x - 3| \leq 2$$

$x - 3$  的絕對值不超過 2 的含義就是  $x - 3$  必須介於  $-2$  和  $2$  之間。所以，

$$-2 \leq x - 3 \leq 2$$

## 範例 2 在實數線上定義區間 (解)

- 解這兩個不等式可得

$$-2 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 2 + 3$$

$$1 \leq x \leq 5 \quad \text{解集合}$$

所以，所求的區間為  $[1,5]$ ，如圖 1.11 所示。

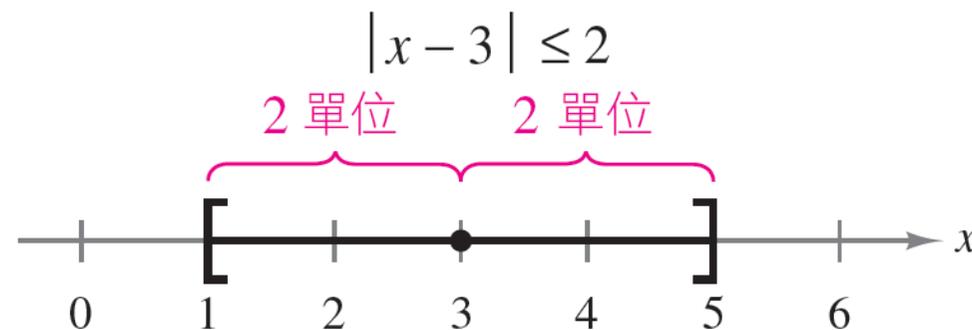


圖 1.11

## 檢查站 2

- 求實數線上所有與 6 的距離不超過 4 個單位實數所形成的區間。

# 絕對值定義的區間

## 兩種含絕對值的基本不等式

令  $a$  和  $d$  是實數，其中  $d > 0$

$$|x - a| \leq d \text{ 若且唯若 } a - d \leq x \leq a + d$$

$$|x - a| \geq d \text{ 若且唯若 } x \leq a - d \text{ 或 } a + d \leq x$$

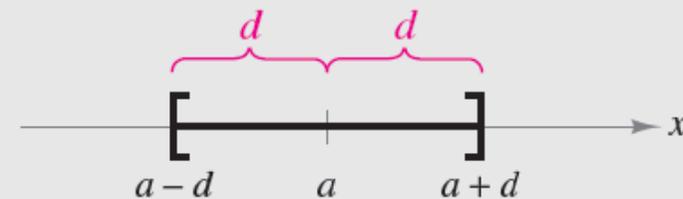
不等式

解釋

圖

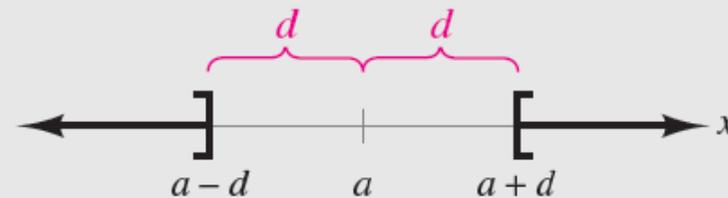
$$|x - a| \leq d$$

所有與  $a$  的距離不超過  $d$  的實數  $x$



$$|x - a| \geq d$$

所有與  $a$  的距離大於或等於  $d$  的實數  $x$



# 學習提示

- 務必了解不等式  $|x - a| \geq d$  的解集合含兩個區間。若不用絕對值來描述這兩個區間，則要用兩個分開的不等式來表示，而這兩個不等式以「或」來表示聯集。

## 應用 範例 3：品管

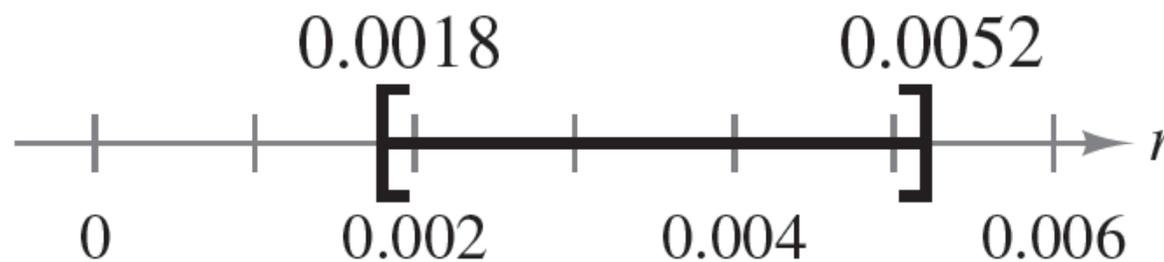
- 一家大製造業者僱用一家品管公司測試某種產品的可靠度。這家品管公司使用統計的方法測定產品不良率為  $0.35\% \pm 0.17\%$ 。如果製造業者對此產品提供可全額退貨的保證，請問要編多少預算才足夠賠償生產 100,000 單位可能產生的退貨？(假設零售價是 \$8.95。)  
這家製造業者所需的賠償預算會超過 \$5000 嗎？

## 範例 3：品管（解）

- 令  $r$  表示不良率 (以小數表示)，則  $r$  和  $0.0035$  的誤差最多為  $0.0017$ 。

$$0.0035 - 0.0017 \leq r \leq 0.0035 + 0.0017$$

$$0.0018 \leq r \leq 0.0052 \quad \text{圖 1.12(a)}$$



(a) 不良率

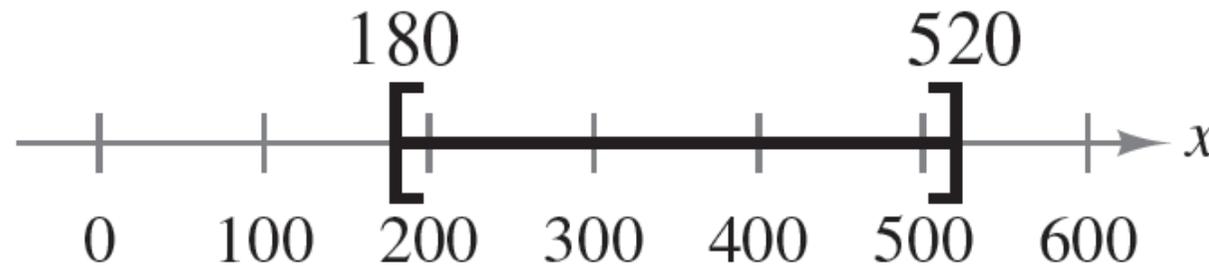
圖 1.12

## 範例 3：品管（解）

- 現在，令  $x$  是生產 100,000 單位中的不良數，則  $x = 100,000r$  且可得

$$0.0018(100,000) \leq 100,000r \leq 0.0052(100,000)$$

$$180 \leq x \leq 520 \quad \text{圖 1.12(b)}$$



(b) 不良數

圖 1.12

## 範例 3：品管（解）

- 最後，令  $C$  是賠償的費用，則  $C = 8.95x$ 。所以，生產 100,000 單位的賠償費用是在區間

$$180(8.95) \leq 8.95x \leq 520(8.95)$$

$$\$1611 \leq C \leq \$4654 \quad \text{圖 1.12(c)}$$

因此，賠償預算小於 \$5000。

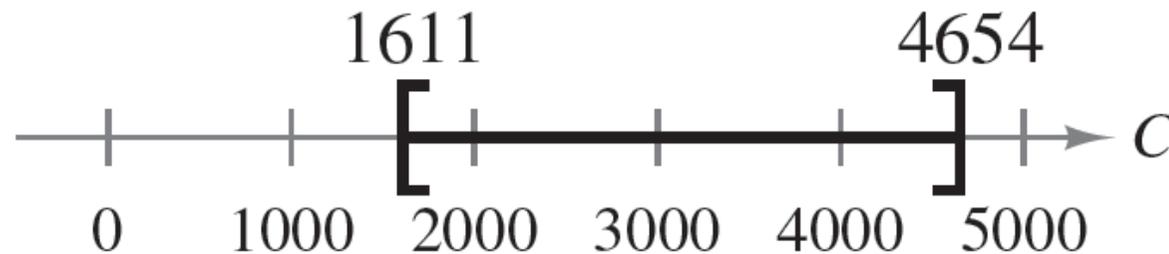


圖 1.12 (c) 賠償費用

# 應用

- 在範例 3 中，製造業者預期將付出 \$1611 到 \$4654 之間的賠償金。當然，比較安全的賠償金預算應比估計的高。然而，從統計的觀點，最能代表估計值是兩個極值的平均值。兩數的平均值就是以這兩數為端點之區間的中點 (midpoint)，如圖 1.13 所示。

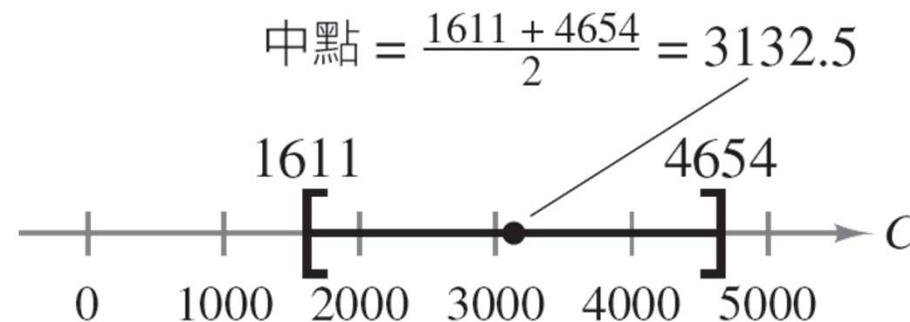


圖 1.13

## 區間的中點

以  $a$  和  $b$  為端點之區間的**中點**就是取端點的平均值。

$$\text{中點} = \frac{a + b}{2}$$

## 檢查站 3

- 用範例 3 的方法，求需編多少預算才足夠賠償生產 250,000 單位時可能產生的退貨。