微積分精華版[第九版]

1.3

指數和根號

歐亞書局

1.3 指數和根號

學習目標

- 求含指數或根號式子的值。
- 化簡含指數的式子。
- 求代數式的定義域。

含指數或根號的式子

指數的性質

1. 非負整數的指數 $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n\text{個}}$

2. 零指數 $x^0 = 1, \quad x \neq 0$

3. 負指數 $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}, \quad x \neq 0$

4. 根號（主 n 方根） $\sqrt[n]{x} = a \Rightarrow x = a^n$

5. 有理指數 $(1/n)$ $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

6. 有理指數 (m/n) $x^{m/n} = (x^{1/n})^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

$x^{m/n} = (x^m)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}$

7. 特例（平方根） $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

學習提示

- 如果 n 是偶數，則主 n 方根為正。例如，
  $\sqrt{4} = +2$ 和 $\sqrt[4]{81} = +3$ 。

範例 1　計算式子的值

式子	x值	代入
a. $y=-2x^2$	$x=4$	$y=-2(4^2)=-2(16)=-32$
b. $y=3x^{-3}$	$x=-1$	$y=3(-1)^{-3}=\dfrac{3}{(-1)^3}=\dfrac{3}{-1}=-3$
c. $y=(-x)^2$	$x=\dfrac{1}{2}$	$y=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$
d. $y=\dfrac{2}{x^{-2}}$	$x=3$	$y=\dfrac{2}{3^{-2}}=2(3^2)=18$

檢查站 1

- 若 $x = 3$ 時，求 $y = 4x^{-2}$ 的值。

範例 2　計算式子的值

式子	x值	代入
a. $y = 2x^{1/2}$	$x = 4$	$y = 2\sqrt{4} = 2(2) = 4$
b. $y = \sqrt[3]{x^2}$	$x = 8$	$y = 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$

檢查站 2

- 若 $x = 8$ 時，求 $y = 4x^{1/3}$ 的值。

指數的運算

指數的運算

1. 乘相同底數：$x^n x^m = x^{n+m}$　　指數相加

2. 除相同底數：$\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$　　指數相減

3. 去掉括號：

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

4. 特例：

$$-x^n = -(x^n)\text{，}-x^n \neq (-x)^n$$

$$cx^n = c(x^n)\text{，}cx^n \neq (cx)^n$$

$$x^{n^m} = x^{(n^m)}\text{，}x^{n^m} \neq (x^n)^m$$

範例 3　化簡含指數的式子

- 化簡下列式子。

a. $2x^2(x^3)$　**b.** $(3x)^2\sqrt[3]{x}$　**c.** $\dfrac{3x^2}{(x^{1/2})^3}$

d. $\dfrac{5x^4}{(x^2)^3}$　**e.** $x^{-1}(2x^2)$　**f.** $\dfrac{-\sqrt{x}}{5x^{-1}}$

範例 3　化簡指數的式子（解）

a. $2x^2(x^3) = 2x^{2+3} = 2x^5$　　$x^n x^m = x^{n+m}$

b. $(3x)^2\sqrt[3]{x} = 9x^2 x^{1/3} = 9x^{2+(1/3)} = 9x^{7/3}$　　$x^n x^m = x^{n+m}$

c. $\dfrac{3x^2}{(x^{1/2})^3} = 3\left(\dfrac{x^2}{x^{3/2}}\right) = 3x^{2-(3/2)} = 3x^{1/2}$　　$(x^n)^m = x^{nm}, \dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

d. $\dfrac{5x^4}{(x^2)^3} = \dfrac{5x^4}{x^6} = 5x^{4-6} = 5x^{-2} = \dfrac{5}{x^2}$　　$(x^n)^m = x^{nm}, \dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

e. $x^{-1}(2x^2) = 2x^{-1}x^2 = 2x^{2-1} = 2x$　　$x^n x^m = x^{n+m}$

f. $\dfrac{-\sqrt{x}}{5x^{-1}} = -\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{x^{1/2}}{x^{-1}}\right) = -\dfrac{1}{5}x^{(1/2)+1} = -\dfrac{1}{5}x^{3/2}$　　$\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

檢查站 3

- 化簡下列式子。

a. $3x^2(x^4)$ **b.** $(2x)^3\sqrt{x}$ **c.** $\dfrac{4x^2}{(x^{1/3})^2}$

指數的運算

- 注意在範例 3 中化簡的式子有一個特徵就是沒有負指數。其他的特徵就是和與差寫成因式的形式。為了做到這一點，可用**分配律的性質** (Distributive Property)。

$$abx^n + acx^{n+m} = ax^n(b + cx^m)$$

下一個範例須小心研讀，以確定了解因式分解過程中的觀念。

範例 4　用因式分解化簡

- 用因式分解化簡下列式子。

a. $2x^2 - x^3$

b. $2x^3 + x^2$

c. $2x^{1/2} + 4x^{5/2}$

d. $2x^{-1/2} + 3x^{5/2}$

範例 4　用因式分解化簡（解）

a. $2x^2 - x^3 = x^2(2 - x)$

b. $2x^3 + x^2 = x^2(2x + 1)$

c. $2x^{1/2} + 4x^{5/2} = 2x^{1/2}(1 + 2x^2)$

d. $2x^{-1/2} + 3x^{5/2} = x^{-1/2}(2 + 3x^3) = \dfrac{2+3x^3}{\sqrt{x}}$

檢查站 4

- 用因式分解化簡下列式子。

a. $x^3 - 2x$

b. $2x^{1/2} + 8x^{3/2}$

指數的運算

- 很多在微積分中所求得的代數式並非以最簡的形式出現。例如，下面範例所示的兩個式子是由微積分的**微分** (differentiation)之運算所得〔第一個是 $2(x+1)^{3/2}(2x-3)^{5/2}$ 的導數，而第二個是$2(x+1)^{1/2}(2x-3)^{5/2}$ 的導數〕。

學習提示

- 為了驗算化簡的式子是否等於原式子，可在每個式子中代入 x 值來驗算。

範例 5　用因式分解化簡

- 用因式分解化簡下列式子。

a. $3(x+1)^{1/2}(2x-3)^{5/2}+10(x+1)^{3/2}(2x-3)^{3/2}$

$$=(x+1)^{1/2}(2x-3)^{3/2}[3(2x-3)+10(x+1)]$$

$$=(x+1)^{1/2}(2x-3)^{3/2}(6x-9+10x+10)$$

$$=(x+1)^{1/2}(2x-3)^{3/2}(16x+1)$$

範例 5　用因式分解化簡

b. $(x+1)^{-1/2}(2x-3)^{5/2}+10(x+1)^{1/2}(2x-3)^{3/2}$

$$=(x+1)^{-1/2}(2x-3)^{3/2}[(2x-3)+10(x+1)]$$

$$=(x+1)^{-1/2}(2x-3)^{3/2}(2x-3+10x+10)$$

$$=(x+1)^{-1/2}(2x-3)^{3/2}(12x+7)$$

$$=\frac{(2x-3)^{3/2}(12x+7)}{(x+1)^{1/2}}$$

檢查站 5

- 用因式分解化簡下列式子

$$(x+2)^{1/2}(3x-2)^{3/2}+4(x+2)^{-1/2}(3x-1)^{5/2}$$

指數的運算

- 範例 6 所示為一些可能在微積分出現的其他類型之式子〔範例6(d) 是 $(x+1)^{2/3}(2x+3)$ 的反導數，範例 6(e) 是 $(x+2)^3/(x-1)^3$的導數〕。

範例 6　含商的因式分解

- 用因式分解化簡下列式子。

a. $\dfrac{3x^2 + x^4}{2x}$

b. $\dfrac{\sqrt{x} + x^{3/2}}{x}$

c. $(9x+2)^{-1/3} + 18(9x+2)$

d. $\dfrac{3}{5}(x+1)^{5/3} + \dfrac{3}{4}(x+1)^{8/3}$

e. $\dfrac{3(x+2)^2(x-1)^3 - 3(x+2)^3(x-1)^2}{[(x-1)^3]^2}$

範例 6　含商的因式分解（解）

a. $\dfrac{3x^2+x^4}{2x}=\dfrac{x^2(3+x^2)}{2x}=\dfrac{x^{2-1}(3+x^2)}{2}=\dfrac{x(3+x^2)}{2}$

b. $\dfrac{\sqrt{x}+x^{3/2}}{x}=\dfrac{x^{1/2}(1+x)}{x}=\dfrac{1+x}{x^{1-(1/2)}}=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

c. $(9x+2)^{-1/3}+18(9x+2)=(9x+2)^{-1/3}[1+18(9x+2)^{4/3}]$

$$=\frac{1+18(9x+2)^{4/3}}{\sqrt[3]{9x+2}}$$

範例 6　含商的因式分解（解）

d. $\frac{3}{5}(x+1)^{5/3}+\frac{3}{4}(x+1)^{8/3}=\frac{12}{20}(x+1)^{5/3}+\frac{15}{20}(x+1)^{8/3}$

$$=\frac{3}{20}(x+1)^{5/3}[4+5(x+1)]$$

$$=\frac{3}{20}(x+1)^{5/3}(4+5x+5)$$

$$=\frac{3}{20}(x+1)^{5/3}[5x+9]$$

範例 6　含商的因式分解（解）

e. $$\frac{3(x+2)^2(x-1)^3-3(x+2)^3(x-1)^2}{[(x-1)^3]^2}$$

$$=\frac{3(x+2)^2(x-1)^2[(x-1)-(x+2)]}{(x-1)^6}$$

$$=\frac{3(x+2)^2(x-1-x-2)}{(x-1)^{6-2}}$$

$$=\frac{-9(x+2)^2}{(x-1)^4}$$

檢查站 6

- 用因式分解化簡下列式子。

$$\frac{5x^3 + x^6}{3x}$$

代數式的定義域

- 在做 x 代數式的運算時，有時會遇到將 x 代入某一個值使得這個式子無定義 (不能產生一個實數) 的問題。例如，當 $x = -2$ 時，$\sqrt{2x+3}$ 是無定義的，因為$\sqrt{2(-2)+3} = \sqrt{-1}$ 不是一個實數。

代數式的定義域

- 使得一個式子有定義之所有 x 值的集合稱為它的**定義域**(domain)。所以，$\sqrt{2x+3}$ 的定義域是所有使得 $\sqrt{2x+3}$ 為實數之所有 x 值的集合。為了使 $\sqrt{2x+3}$ 成為一個實數，$2x+3 \geq 0$ 必須成立，也就是說 $\sqrt{2x+3}$ 僅在 x 的值落在區間 $[-\frac{3}{2}, \infty)$ 時才有定義，如圖 1.14 所示。

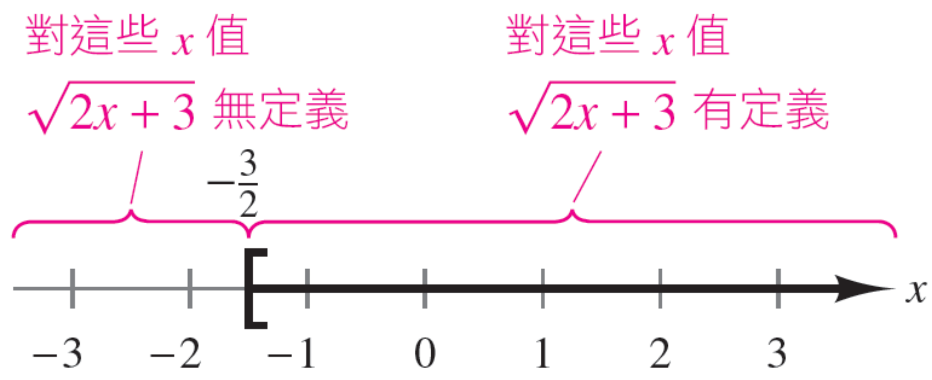

圖 1.14

範例 7　求式子的定義域

- 求下列式子的定義域。

a. $\sqrt{3x-2}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$

c. $\sqrt[3]{9x+1}$

範例 7　求式子的定義域（解）

a. $\sqrt{3x-2}$ 的定義域包含所有 x 使得

$3x - 2 \geq 0$　　　　式子必須為非負的

故得 $x \geq \frac{2}{3}$。所以，定義域是 $[\frac{2}{3}, \infty)$。

b. 除了 $1/\sqrt{3x-2}$ 在 $3x - 2 = 0$ (亦即 $x = \frac{2}{3}$) 時無定義之外，其定義域是與 $\sqrt{3x-2}$ 的定義域相同，所以，它的定義域是 $(\frac{2}{3}, \infty)$。

c. 因為 $\sqrt[3]{9x+1}$ 對所有的實數都有定義，所以它的定義域是 $(-\infty, \infty)$。

檢查站 7

- 求下列式子的定義域。

a. $\sqrt{x-2}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

c. $\sqrt[3]{x-2}$