微積分精華版[第九版]

1.4

多項式的因式分解

歐亞書局

1.4 多項式的因式分解

學習目標

- 利用特殊乘積與因式分解技巧分解多項式。
- 利用綜合除法因式分解三次或更高次的多項式。
- 利用有理根定理求多項式的實數根。

因式分解的技巧

- **代數基本定理** (Fundamental Theorem of Algebra) 是指每個 n 次多項式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_1 x + a_0, \ \ a_n \neq 0$$

恰有n個**根**(zeros)(這些根可能為重根或者為虛根)。求多項式之根的問題相當於分解多項式成線性因式的問題。

因式分解的技巧

特殊乘積及因式分解技巧

二次公式	範例
$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$
特殊乘積	**範例**
$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$	$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$
$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$	$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$	$x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$
$x^4 - a^4 = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2)$	$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

因式分解的技巧

二項式定理	範例
$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$	$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$	$(x^2-5)^2 = x^4 - 10x^2 + 25$
$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$	$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$	$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$	$(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$
$(x-a)^4 = x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4$	$(x-4)^4 = x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3x^{n-3} + \cdots + na^{n-1}x + a^n{}^*$$

$$(x-a)^n = x^n - nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3x^{n-3} + \cdots \pm na^{n-1}x \mp a^n$$

分組分解	範例
$acx^3 + adx^2 + bcx + bd = ax^2(cx+d) + b(cx+d)$ $= (ax^2+b)(cx+d)$	$3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = x^2(3x-2) - 2(3x-2)$ $= (x^2-2)(3x-2)$

* 階乘符號！的定義如下：$0! = 1$，$1! = 1$，$2! = 2 \cdot 1 = 2$，$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$，$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$，以此類推。

範例 1　應用二次公式

- 用二次公式求下列多項式的實數根。

  a. $4x^2 + 6x + 1$

  b. $x^2 + 6x + 9$

  c. $2x^2 - 6x + 5$

範例 1　應用二次公式（解）

a. 用 $a = 4$、$b = 6$ 和 $c = 1$ 代入可得

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(4)(1)}}{2(4)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-16}}{8}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{2(-3 \pm \sqrt{5})}{2(4)} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$$

所以，兩個實數根為

$$x = \frac{-3-\sqrt{5}}{4} \approx -1.309 \quad \text{和} \quad x = \frac{-3+\sqrt{5}}{4} \approx -0.191$$

範例 1　應用二次公式（解）

b. 將 $a = 1$、$b = 6$ 以及 $c = 9$ 代入二次公式得

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

所以，只有一個 (重複的) 根：$x = -3$

c. 就這個二次方程式而言，代入 $a = 2$、$b = -6$ 以及 $c = 5$。 而得到

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{4}$$

因為 $\sqrt{-4}$ 是虛數，所以沒有實數根。

檢查站 1

- 用二次公式求下列多項式的實數根。

  a. $2x^2 + 4x + 1$

  b. $x^2 - 8x + 16$

  c. $2x^2 - x + 5$

因式分解的技巧

- 範例 1(a) 的根是無理數，而範例 1(c) 的根是虛數。這兩種情況的二次式稱為**不可約的** (irreducible)，因為不能分解為有理係數的線性因式。下一範例將說明如何求可約二次式的根，在這個範例中，因式分解是用來求二次式的根。試著用二次公式去求出相同的根。

範例 2　二次式的因式分解

- 求下列二次多項式的根。

a. $x^2 - 5x + 6$

b. $x^2 - 6x + 9$

c. $2x^2 + 5x - 3$

範例 2　二次式的因式分解（解）

a. 因為

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

所以根為 $x = 2$ 以及 $x = 3$。

b. 因為

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

所以只有一個根為 $x = 3$

c. 因為

$$2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$$

所以根為 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = -3$。

檢查站 2

- 求下列二次多項式的根。

a. $x^2 - 2x - 15$

b. $x^2 + 2x + 1$

c. $2x^2 - 7x + 6$

範例 3　求根式的定義域

- 求$\sqrt{x^2-3x+2}$的定義域。

範例 3　求根式的定義域（解）

- 因為

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

二次式的根為 $x = 1$ 和 $x = 2$。所以需要檢驗二次式在區間$(-\infty, 1)$、$(1, 2)$ 和 $(2, \infty)$ 的正負，如圖 1.15 所示。檢驗每個區間的正負後，可知二次式在中間的區間為負，而在外面的兩個區間為正。此外，因為 $x = 1$ 以及 $x = 2$ 時，二次式為零，所以 $\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定義域是

$$(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$$ 定義域

範例 3　求根式的定義域（解）

$\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 的值

x	$\sqrt{x^2 - 3x + 2}$
0	$\sqrt{2}$
1	0
1.5	無定義
2	0
3	$\sqrt{2}$

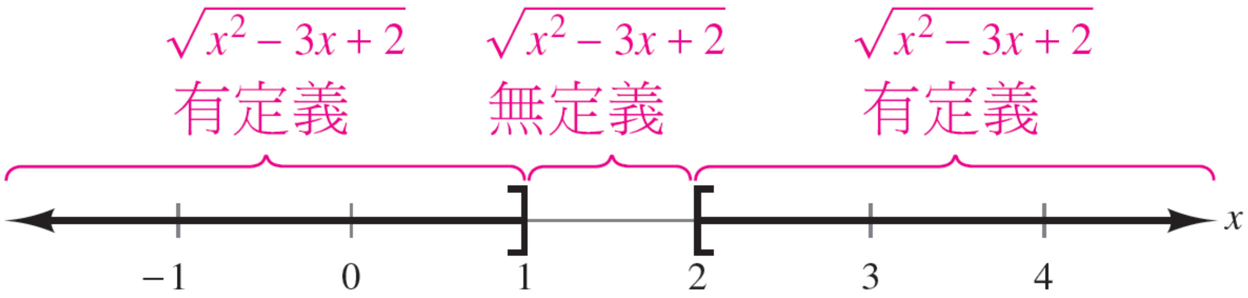


圖 1.15

檢查站 3

- 求 $\sqrt{x^2+x-2}$ 的定義域。

三次或更高次多項式的因式分解

- 求三次或更高次多項式的根可能是很困難的，但是若知道其中一個根，就可以用這個根來降低多項式的次數。例如，$x = 2$ 是 $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ 的一個根，那麼 $(x - 2)$ 就是一個因式，且可用長除法分解多項式，如下所示：

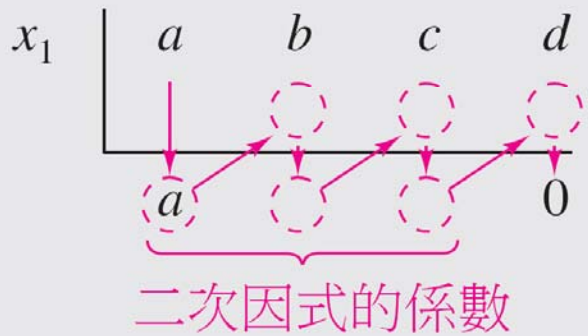
$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 &= (x - 2)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x - 2)(x - 1)(x - 1) \end{aligned}$$

如同選擇長除法一樣，很多人更喜歡使用**綜合除法** (synthetic division) 去降低多項式的次數。

三次或更高次多項式的因式分解

三次多項式的綜合除法

已知：$x = x_1$ 是 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的一個根。



垂直方式：
相加

對角方式：
乘 x_1。

三次或更高次多項式的因式分解

- 對多項式 $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ 使用綜合除法時，由已知根 $x = 2$ 可得

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -4 & 5 & -2 \\
 & & 2 & -4 & 2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$(x - 2)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

三次或更高次多項式的因式分解

- 在使用綜合除法時，要將所有的係數都列入——尤其是係數為零時。例如，如果已知 $x = -2$ 是 $x^3 + 3x + 14$ 的一個根，則綜合除法的應用如下所示：

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 0 & 3 & 14 \\
 & & -2 & 4 & -14 \\
\hline
 & 1 & -2 & 7 & 0
\end{array}
$$

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 7) = x^3 + 3x + 14$$

學習提示

- 上頁綜合除法的演算只是針對類型為 $x - x_1$ 的除數，其實 $x + x_1 = x - (-x_1)$ 也就是這種型式。

有理根定理

- 接下來要介紹求多項式之有理根的系統方法，即**有理根定理**(Rational Zero Theorem)。

有理根定理

如果多項式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

有整數係數，那麼每一個有理根的類型為 $x = p/q$，p 是 a_0 的因數，以及q 是 a_n 的因數。

範例 4　使用有理根定理

- 求多項式 $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ 所有的實數根。

範例 4　有理根定理的使用（解）

$$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$$

常數項的因數：$\pm1, \pm3$

首項係數的因數：$\pm1, \pm2$

- 可能的有理根就是常數項的因數除以首項係數的因數。

$$1, -1, 3, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$$

由驗算這些可能的根時，得知 $x = 1$ 就是一個根。

$$2(1)^3 + 3(1)^2 - 8(1) + 3 = 2 + 3 - 8 + 3 = 0$$

範例 3　有理根定理的使用（解）

- 現在，由綜合除法可得到下面的結果。

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 2 & 3 & -8 & 3 \\
 & & 2 & 5 & -3 \\
\hline
 & 2 & 5 & -3 & 0
\end{array}
$$

$$(x-1)(2x^2+5x-3) = 2x^3+3x^2-8x+3$$

最後，因式分解 $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$，可得

$$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = (x - 1)(2x - 1)(x + 3)$$

所以求得的根為 $x = 1$、$x = 1/2$和 $x = -3$。

學習提示

- 在範例 4 中，可將求得的根代入原多項式，以檢驗答案是否正確。

檢驗 $x = 1$ 是否為根

$$2(1)^3 + 3(1)^2 - 8(1) + 3$$

$$= 2 + 3 - 8 + 3$$

$$= 0$$

學習提示（續）

- 檢驗 $x = \frac{1}{2}$ 是否為根

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}\right) + 3$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 4 + 3$$

$$= 0$$

檢驗 $x = -3$ 是否為根

$$2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 8(-3) + 3$$

$$= -54 + 27 + 24 + 3$$

$$= 0$$

檢查站 4

- 求多項式 $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ 所有的實數根。