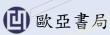


## 微積分精華版[第九版]

1.5

分式與有理化





#### 1.5 分式與有理化

#### 學習目標

- 化簡有理式
- 有理式的加減。
- 化簡含根號的有理式。
- 有理式分子和分母的有理化。





#### 化簡有理式

■ 本節將複習含有分式的式子如

$$\frac{2}{x}$$
,  $\frac{x^2 + 2x - 4}{x + 6}$   $\neq 0$   $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 

的運算。前兩個式子的分子和分母皆為多項式, 這樣的式子稱為有理式 (rational expressions)。



#### 化簡有理式

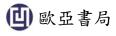
■ 一個有理式如果它的分子的次數小於分母的次數,則稱為真(proper)有理式。例如:

$$\frac{x}{x^2+1}$$

是一個真有理式。如果分子的次數大於或等於分母的次數則稱為假 (improper) 有理式。例如:

$$\frac{x^2}{x^2+1}$$
  $\pi \frac{x^3+2x+1}{x+1}$ 

都是假有理式。





#### 化簡有理式

一個分式如果分母和分子除了±1外,沒有其他 公因式,則稱其為最簡式。要化為最簡式,必 須約掉公因式。

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}, \ c \neq 0$$

化簡分式成功的關鍵決定於你的多項式因式分 解能力。當在化簡分式時,在下分子和分母沒 有公因式的結論之前,確認每個多項式都已完 全分解。



#### 學習提示

■ 為了化簡有理式,可能需要由分解出(-1)來改變一個因式的正負號,如範例1所示。



### 範例1 化簡有理式

■ 將 
$$\frac{12+x-x^2}{2x^2-9x+4}$$
 化成最簡式。





### 範例1 化簡有理式 (解)

$$\frac{12+x-x^2}{2x^2-9x+4} = \frac{(4-x)(3+x)}{(2x-1)(x-4)}$$
完全分解
$$= \frac{-(x-4)(3+x)}{(2x-1)(x-4)} \qquad (4-x) = -(x-4)$$

$$= -\frac{3+x}{2x-1}, x \neq 4 \qquad 約掉公因式$$



#### 檢查站1

• 將 
$$\frac{x^2 + 8x - 20}{x^2 + 11x + 10}$$
 化成最簡式。



#### 分式的運算

#### 分式的運算

1. 分式的加法 (通分求公分母):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \left( \frac{d}{d} \right) + \frac{c}{d} \left( \frac{b}{b} \right) = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

2. 分式的减法(通分求公分母):

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \left( \frac{d}{d} \right) - \frac{c}{d} \left( \frac{b}{b} \right) = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

3. 分式的乘法:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$



#### 分式的運算

#### 4. 分式的除法(分子分母對調再相乘):

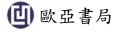
$$\frac{a/b}{c/d} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a/b}{c} = \frac{a/b}{c/1} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{a}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0$$

#### 5. 約分:

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}, \quad a \neq 0, c \neq 0$$

$$\frac{ab+ac}{ad} = \frac{a(b+c)}{ad} = \frac{b+c}{d}, \quad a \neq 0, d \neq 0$$





#### 範例2 有理數的加減

■ 完成下列式子的運算及化簡。

**a.** 
$$x + \frac{1}{x}$$

**b.** 
$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{2x-1}$$



### 範例1 有理數的加減 (解)

**a.** 
$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x}$$
**b.**  $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{(2x-1)}{(x+1)(2x-1)} - \frac{2(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$ 

$$= \frac{2x-1-2x-2}{2x^2+x-1} = \frac{-3}{2x^2+x-1}$$



### 檢查站 2

■ 完成下列式子的運算及化簡。

**a.** 
$$x + \frac{2}{x}$$

**b.** 
$$\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2x+1}$$



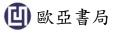
#### 分式的運算

分母沒有公因式時分式的加(或減),可使用下列的算法。

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{\langle \hat{b} \rangle} + \frac{c}{\langle \hat{d} \rangle} = \frac{ad + bc}{bd}$$

例如,在範例 2(b) 中,也可使用這種算法,如下所示。

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{(2x-1) - 2(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$
$$= \frac{2x-1-2x-2}{(x+1)(2x-1)} = \frac{-3}{2x^2+x-1}$$





#### 分式的運算

在範例2中,有理式的分母沒有公因式。當分母有公因式時,最好先求最小公分母再加減。
 例如,1/x和2/x²相加時,最小公分母為x²,因此,

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}$$
 通分
$$= \frac{x+2}{x^2}$$
 分式相加

在範例3中將再做進一步的說明。



#### 範例3 有理式的相加

■ 完成下列式子的運算並化簡。

$$\frac{x}{x^2-1} + \frac{3}{x+1}$$



### 範例3 有理式的相加(解)

因為 
$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$
, 所以最小公分母為  $x^2 - 1$ 。

$$\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{3}{x + 1} = \frac{x}{(x - 1)(x + 1)} + \frac{3}{x + 1}$$

因式分解

$$= \frac{x}{(x-1)(x+1)} + \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)} \quad \text{if } \mathcal{A}$$

$$=\frac{x+3(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

分式相加

$$=\frac{x+3x-3}{(x-1)(x+1)}$$

相乘

$$=\frac{4x-3}{x^2-1}$$

化簡



#### 檢查站 3

■ 完成下列式子的運算並化簡。

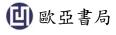
$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{x-2}$$



### 範例 4 有理式的相减

■ 完成下列式子的運算並化簡。

$$\frac{1}{2(x^2+2x)}-\frac{1}{4x}$$





#### 範例4 有理式的相減 (解)

■ 此時的最小分母為4x(x+2)。

此時的最小分母為
$$4x(x+2)$$
。
$$\frac{1}{2(x^2+2x)} - \frac{1}{4x} = \frac{1}{2x(x+2)} - \frac{1}{2(2x)} \qquad \qquad \text{因式分解}$$

$$= \frac{2}{2(2x)(x+2)} - \frac{x+2}{2(2x)(x+2)} \qquad \qquad \hat{\text{通分}}$$

$$= \frac{2-(x+2)}{4x(x+2)} \qquad \qquad \hat{\text{分式 相減}}$$

$$= \frac{2-x-2}{4x(x+2)} \qquad \qquad \text{去掉括號}$$

$$= \frac{-x}{4x(x+2)} \qquad \qquad \text{糸分}$$

$$= \frac{-1}{4(x+2)}, x \neq 0 \qquad \qquad \text{化簡}$$



#### 檢查站 4

■ 完成下列式子的運算並化簡。

$$\frac{1}{3(x^2+2x)} - \frac{1}{3x}$$





#### 範例5 三個有理式的運算

■ 完成下列式子的運算並化簡。

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} + \frac{x+3}{x^2-1}$$



## 範例5 三個有理式的運算(解)

■ 由已分解的分母(x-1)、x 以及(x+1) (x-1) 可知最小的公分母為x (x+1) (x-1) 。

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} + \frac{x+3}{x^2 - 1} = \frac{3(x)(x+1)}{x(x+1)(x-1)} - \frac{2(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} + \frac{(x+3)(x)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{3(x)(x+1) - 2(x+1)(x-1) + (x+3)(x)}{x(x+1)(x-1)}$$



## 範例5 三個有理式的運算(解)續

$$= \frac{3x^2 + 3x - 2x^2 + 2 + x^2 + 3x}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2 + 6x + 2}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2(x^2 + 3x + 1)}{x(x+1)(x-1)}$$



#### 檢查站 5

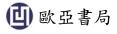
■ 完成下列式子的運算並化簡。

$$\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x+3}$$



#### 含根號的式子

在微積分中,分式的微分會產生「麻煩的」式子。尤其是分式包含根號時特別明顯。在做微分運算時,化簡式子成簡約的形式尤其重要。 範例6的式子是微分的結果。在每一例子中化簡後的式子都比原式簡約很多。





#### 範例 6 化簡含根號的式子

■ 化簡下列式子。

$$\mathbf{a.} \frac{\sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$\mathbf{b.} \left( \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$



## 範例6 化簡含根號的式子 (解)

a. 
$$\frac{\sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x+1}} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$
 通分
$$= \frac{\frac{2x+2-x}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{x+1}{1}}$$
 分式相減
$$= \frac{x+2}{2\sqrt{x+1}} \left(\frac{1}{x+1}\right)$$
 相除,分子分母對 調再相乘
$$= \frac{x+2}{2(x+1)^{3/2}}$$
 相乘



## 範例6 化簡含根號的式子 (解)

$$\mathbf{b} \cdot \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$



#### 檢查站 6

■ 化簡下列式子。

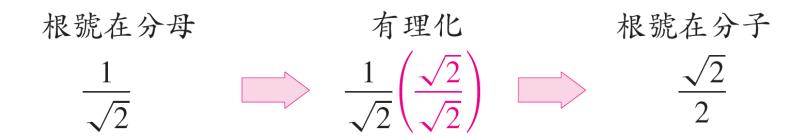
$$\mathbf{a.} \frac{\sqrt{x+2} - \frac{x}{4\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$\mathbf{b.} \left( \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \right) \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \right)$$



#### 有理化技巧

■ 在處理含根號的商時,通常會將根式從分母搬到分子或從分子搬到分母。例如,藉由乘 $\sqrt{2}$ 可將 $\sqrt{2}$  從分母搬到分子。



這個過程稱為分母有理化 (rationalizing the denominator)。相似的過程可用在分子有理化 (rationalize the numerator)。



#### 有理化技巧

#### 有理化技巧

- **1.** 如果分母是  $\sqrt{a}$  ,乘  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$  。
- **2.** 如果分母是  $\sqrt{a} \sqrt{a}$ ,乘  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ 。
- **3.** 如果分母是  $\sqrt{a} + \sqrt{a}$  ,乘  $\frac{\sqrt{a} \sqrt{b}}{\sqrt{a} \sqrt{b}}$  。

同樣的方法可用在分子有理化。



#### 學習提示

有理化技巧的第二和第三個技巧可行是因為下列的等式成立

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$$



#### 範例7 分母和分子的有理化

■ 將下列各式的分母或分子有理化。

**a.** 
$$\frac{3}{\sqrt{12}}$$

$$\mathbf{b.} \frac{\sqrt{x+1}}{2}$$

$$\mathbf{c.} \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$

$$\mathbf{d.} \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}$$

# 範例7 分母和分子的有理化 (解) CENGAG Learning

$$\mathbf{a.} \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2(3)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**b.** 
$$\frac{\sqrt{x+1}}{2} = \frac{\sqrt{x+1}}{2} \left( \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \right) = \frac{x+1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\mathbf{c.} \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$$

CENGAGE

# 範例7 分母和分子的有理化 (解) CENGAG Learning

$$\mathbf{d.} \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \right)$$
$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x - (x+1)}$$
$$= -\sqrt{x} - \sqrt{x+1}$$

CENGAGE



#### 檢查站7

■ 將下列各式的分母或分子有理化。

**a.** 
$$\frac{5}{\sqrt{8}}$$

$$\mathbf{b.} \frac{\sqrt{x+2}}{4}$$

**c.** 
$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{d.} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}$$