微積分精華版[第九版]

1.5

分式與有理化

歐亞書局

CENGAGE Learning

1.5 分式與有理化

學習目標

- 化簡有理式
- 有理式的加減。
- 化簡含根號的有理式。
- 有理式分子和分母的有理化。

化簡有理式

- 本節將複習含有分式的式子如

$$\frac{2}{x},\quad \frac{x^2+2x-4}{x+6} \text{ 和 } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

的運算。前兩個式子的分子和分母皆為多項式，這樣的式子稱為**有理式** (rational expressions)。

化簡有理式

- 一個有理式如果它的分子的次數小於分母的次數，則稱為**真** (proper) 有理式。例如：

$$\frac{x}{x^2+1}$$

是一個真有理式。如果分子的次數大於或等於分母的次數則稱為**假** (improper) 有理式。例如：

$$\frac{x^2}{x^2+1} \text{ 和 } \frac{x^3+2x+1}{x+1}$$

都是假有理式。

化簡有理式

- 一個分式如果分母和分子除了 ±1 外，沒有其他公因式，則稱其為最簡式。要化為最簡式，必須約掉公因式。

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}, \ c \neq 0$$

化簡分式成功的關鍵決定於你的多項式因式分解能力。當在化簡分式時，在下分子和分母沒有公因式的結論之前，確認每個多項式都已完全分解。

學習提示

- 為了化簡有理式，可能需要由分解出 (—1) 來改變一個因式的正負號，如範例 1 所示。

範例 1　化簡有理式

- 將 $\dfrac{12+x-x^2}{2x^2-9x+4}$ 化成最簡式。

範例 1　化簡有理式（解）

$$\frac{12+x-x^2}{2x^2-9x+4}=\frac{(4-x)(3+x)}{(2x-1)(x-4)}$$

完全分解

$$=\frac{-\cancel{(x-4)}\,(3+x)}{(2x-1)\,\cancel{(x-4)}}$$

$(4-x)=-(x-4)$

$$=-\frac{3+x}{2x-1},\ x\neq 4$$

約掉公因式

檢查站 1

- 將 $\dfrac{x^2+8x-20}{x^2+11x+10}$ 化成最簡式。

分式的運算

分式的運算

1. 分式的加法 (通分求公分母)：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\left(\frac{d}{d}\right)+\frac{c}{d}\left(\frac{b}{b}\right)=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd},\quad b\neq 0, d\neq 0$$

2. 分式的減法 (通分求公分母)：

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\left(\frac{d}{d}\right)-\frac{c}{d}\left(\frac{b}{b}\right)=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd},\quad b\neq 0, d\neq 0$$

3. 分式的乘法：

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd},\quad b\neq 0, d\neq 0$$

分式的運算

4. 分式的除法 (分子分母對調再相乘)：

$$\frac{a/b}{c/d} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a/b}{c} = \frac{a/b}{c/1} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{a}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0$$

5. 約分：

$$\frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}c} = \frac{b}{c}, \quad a \neq 0, c \neq 0$$

$$\frac{ab + ac}{ad} = \frac{\cancel{a}(b + c)}{\cancel{a}d} = \frac{b + c}{d}, \quad a \neq 0, d \neq 0$$

範例 2　有理數的加減

- 完成下列式子的運算及化簡。

a. $x+\dfrac{1}{x}$

b. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{2x-1}$

範例 1　有理數的加減（解）

$$\textbf{a. } x+\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}$$　通分

$$=\frac{x^2+1}{x}$$　相加

$$\textbf{b. } \frac{1}{x+1}-\frac{2}{2x-1}=\frac{(2x-1)}{(x+1)(2x-1)}-\frac{2(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$

$$=\frac{2x-1-2x-2}{2x^2+x-1}=\frac{-3}{2x^2+x-1}$$

檢查站 2

- 完成下列式子的運算及化簡。

a. $x+\dfrac{2}{x}$

b. $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{2x+1}$

分式的運算

- 分母沒有公因式時分式的加(或減)，可使用下列的算法。

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

例如，在範例 2(b) 中，也可使用這種算法，如下所示。

$$\frac{1}{x+1}-\frac{2}{2x-1}=\frac{(2x-1)-2(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$

$$=\frac{2x-1-2x-2}{(x+1)(2x-1)}=\frac{-3}{2x^2+x-1}$$

分式的運算

- 在範例 2 中，有理式的分母沒有公因式。當分母有公因式時，最好先求最小公分母再加減。例如，$1/x$ 和 $2/x^2$ 相加時，最小公分母為 x^2，因此，

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2} \quad \text{通分}$$

$$=\frac{x+2}{x^2} \quad \text{分式相加}$$

在範例 3 中將再做進一步的說明。

範例 3　有理式的相加

- 完成下列式子的運算並化簡。

$$\frac{x}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}$$

範例 3　有理式的相加（解）

因為 $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$，所以最小公分母為 $x^2 - 1$。

$$\frac{x}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}+\frac{3}{x+1}$$ 因式分解

$$=\frac{x}{(x-1)(x+1)}+\frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$ 通分

$$=\frac{x+3(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$ 分式相加

$$=\frac{x+3x-3}{(x-1)(x+1)}$$ 相乘

$$=\frac{4x-3}{x^2-1}$$ 化簡

檢查站 3

- 完成下列式子的運算並化簡。

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{2}{x-2}$$

範例 4　有理式的相減

- 完成下列式子的運算並化簡。

$$\frac{1}{2\left(x^2+2x\right)}-\frac{1}{4x}$$

範例 4　有理式的相減 (解)

- 此時的最小分母為$4x(x+2)$。

$$\frac{1}{2\left(x^2+2x\right)}-\frac{1}{4x}=\frac{1}{2x\left(x+2\right)}-\frac{1}{2(2x)}$$ 因式分解

$$=\frac{2}{2\left(2x\right)\left(x+2\right)}-\frac{x+2}{2\left(2x\right)\left(x+2\right)}$$ 通分

$$=\frac{2-\left(x+2\right)}{4x\left(x+2\right)}$$ 分式相減

$$=\frac{2-x-2}{4x\left(x+2\right)}$$ 去掉括號

$$=\frac{-\cancel{x}}{4\cancel{x}\left(x+2\right)}$$ 約分

$$=\frac{-1}{4\left(x+2\right)},\ x\neq 0$$ 化簡

檢查站 4

- 完成下列式子的運算並化簡。

$$\frac{1}{3\left(x^2+2x\right)}-\frac{1}{3x}$$

範例 5　三個有理式的運算

- 完成下列式子的運算並化簡。

$$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{x+3}{x^2-1}$$

範例 5　三個有理式的運算 (解)

- 由已分解的分母$(x-1)$、x 以及$(x+1)(x-1)$可知最小的公分母為$x(x+1)(x-1)$。

$$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{3(x)(x+1)}{x(x+1)(x-1)}-\frac{2(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$+\frac{(x+3)(x)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{3(x)(x+1)-2(x+1)(x-1)+(x+3)(x)}{x(x+1)(x-1)}$$

範例 5　三個有理式的運算 (解)續

$$= \frac{3x^2 + 3x - 2x^2 + 2 + x^2 + 3x}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2 + 6x + 2}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2(x^2 + 3x + 1)}{x(x+1)(x-1)}$$

檢查站 5

- 完成下列式子的運算並化簡。

$$\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x+3}$$

含根號的式子

- 在微積分中，分式的微分會產生「麻煩的」式子。尤其是分式包含根號時特別明顯。在做微分運算時，化簡式子成簡約的形式尤其重要。範例 6 的式子是微分的結果。在每一例子中化簡後的式子都比原式簡約很多。

範例 6　化簡含根號的式子

- 化簡下列式子。

a. $$\frac{\sqrt{x+1}-\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

b. $$\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

範例 6　化簡含根號的式子（解）

$$\textbf{a.}\ \frac{\sqrt{x+1}-\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{\dfrac{2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$ 通分

$$=\frac{\dfrac{2x+2-x}{2\sqrt{x+1}}}{\dfrac{x+1}{1}}$$ 分式相減

$$=\frac{x+2}{2\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$ 相除，分子分母對調再相乘

$$=\frac{x+2}{2(x+1)^{3/2}}$$ 相乘

範例 6　化簡含根號的式子（解）

b. $\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$=\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

檢查站 6

- 化簡下列式子。

a. $$\frac{\sqrt{x+2}-\dfrac{x}{4\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

b. $$\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$$

有理化技巧

- 在處理含根號的商時，通常會將根式從分母搬到分子或從分子搬到分母。例如，藉由乘 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ 可將 $\sqrt{2}$ 從分母搬到分子。

根號在分母　　有理化　　根號在分子

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$

這個過程稱為**分母有理化** (rationalizing the denominator)。相似的過程可用在**分子有理化** (rationalize the numerator)。

有理化技巧

有理化技巧

1. 如果分母是 $\sqrt{a}$，乘 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$。

2. 如果分母是 $\sqrt{a} - \sqrt{a}$，乘 $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$。

3. 如果分母是 $\sqrt{a} + \sqrt{a}$，乘 $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$。

同樣的方法可用在分子有理化。

學習提示

- 有理化技巧的第二和第三個技巧可行是因為下列的等式成立

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$$

範例 7　分母和分子的有理化

- 將下列各式的分母或分子有理化。

a. $\dfrac{3}{\sqrt{12}}$

b. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{2}$

c. $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$

範例 7　分母和分子的有理化（解）

$$\textbf{a. } \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2(3)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\textbf{b. } \frac{\sqrt{x+1}}{2} = \frac{\sqrt{x+1}}{2}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{x+1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\textbf{c. } \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

範例 7　分母和分子的有理化（解）

d. $$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}$$

$$=-\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$$

檢查站 7

- 將下列各式的分母或分子有理化。

a. $\dfrac{5}{\sqrt{8}}$

b. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{4}$

c. $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}$