1-2 二次函數

影片 007

現在我們知道，在典範問題 1 之中，因為只做了兩次實驗，只得到兩個點，而兩點決定一直線，所以只能假設銷售量 q 跟訂價 x 是直線關係；該直線關係為 $q=-25x+9500$。但是我們關心的問題並不是銷售量，而是營業額。營業額 y 與定價 x 的關係是

$$y=q\times x=(-25x+9500)\times x=-25x^2+9500x\ 。$$

像 $-25x^2+9500x$ 的式子稱為**二次多項式**，而函數 $f(x)=-25x^2+9500$ 就稱為二次多項式函數，簡稱**二次函數**。我們說 $y=f(x)$ 是營業額 y 與定價 x 的函數關係。這一節的目標是求此二次函數的最大值（營業額）以及它發生的位置（定價）。

國中學過，二次函數的圖形是一條拋物線。而拋物線必有一最高點（如果開口向下）或最低點（如果開口向上），那就是發生最大值或最小值的位置。我們幾乎不能用手精確地繪製拋物線，應該交給電腦處理。而運用電腦，我們可以畫出以上二次函數的圖形，還可以互動地「縮放」圖形，而幾乎可以目測最大值或最小值。

影片 008

繪製二次函數的圖形

```
plot2d(-25*x^2+9500*x, [x,0,300]);
```

畫出 $y=-25x^2+9500x$ 在 $0\le x\le 300$ 範圍內的函數圖形，其 y 坐標的範圍由軟體自動決定。目測極大值大約發生在 x=200 附近，我們可以要求電腦在 $170\le x\le 220$ 之間畫圖：

```
plot2d(-25*x^2+9500*x, [x,170,220]);
```

[編輯：請將圖放置在這裡，讓讀者看到結果。]

影片 009

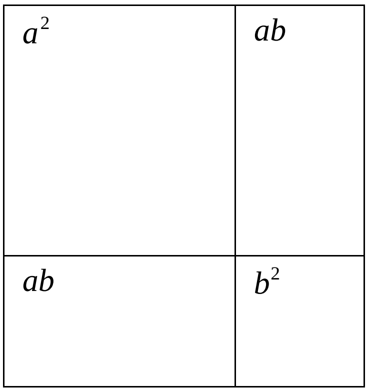
在電腦操作中，已經看到最大值發生在 $x=190$。也就是定價 190 時，收入最多。既然已經可以「目測」極值，我們還要學下去的理由是什麼呢？第一，真實問題不一定會在整數點發生極值，那就不容易目測了。第二，算出真值能夠控制實際操作的誤差；當我們處理大量商務的時候，數學上 1% 的誤差可能造成很大的金額差距，例如一百萬元的 1% 是一萬元，不可不慎啊。第三，定價模型不止二次函數這一種，在此只是起一個觀念性的動機，將來還有更精確、也就更複雜的模型，而模型的優劣當然關係著商場的成敗，要繼續學下去才會知道。

我們將在 1-2.1 學習關鍵技術：配方。配方之後，在 1-2.2 就能解決極值問題。但是在觀念上，更重要的是了解函數圖形平移的意義，然後讓配方發揮更高的功效。在 1-2.3 我們以簡馭繁地了解：所有二次函數的圖形，都是單項函數

$y = ax^2$ 圖形的平移。所以，我們就在 1-2.4 專注於了解 $y = ax^2$ 的圖形特徵。

1-2.1　配方

我們先複習**平方公式** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，其中 a 和 b 表示任意實數。在國中有一個不錯的圖示：假設 a 、b 都是正數，便可以假設它們各是一條線段的長度。參照下圖，淺藍色的正方形邊長為 a，淺紅色正方形的邊長為 b，兩個淡紫色長方形的邊長為 a 、 b ，它們拼在一起是邊長為 $a+b$ 的正方形。



[編輯：請配合上色。]

因為大正方形的面積是 $(a+b)^2$ ，分成四塊區域的面積是 $a^2 + 2ab + b^2$ ，顯然它們應該相等： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

將來我們須要 $(x \pm h)^2$ 形式的平方公式。運用基本公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

將 a 置換成 x，將 b 置換成 h ，套用公式得到

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

再將 b 置換成 $-h$ ，套用公式得到

$$(x-h)^2 = \left(x+(-h)\right)^2 = x^2 + 2x(-h) + (-h)^2 = x^2 - 2xh + h^2$$

我們發現以上兩條公式在 h 一次項的係數是同號的（同為正或者同為負），可以合併寫成以下公式：

$$(x \pm h)^2 = x^2 \pm 2hx + h^2$$

其中 $\pm$ 讀作「加減」，就是加或者減的意思。注意我們將 x 一次項寫成 $2hx$，將 $2h$ 整個看成 x 的係數，稍後比較簡單。

影片 010

上述 $(x \pm h)^2$ 稱為**完全平方**，而所謂**配方**就是「湊成完全平方再加減一個常數」的意思。利用平方公式，我們可以「展開」完全平方，例如

$$(x-1)^2 = x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 = x^2 - 2x + 1 \text{。}$$

反過來運用平方公式，就可以配方了。

例如要做 x^2+2x 的配方，可依循以下步驟：

第一步：觀察正負號

因為 x^2+2x 中 x 係數是正號，所以完全平方內要選正號：$(x+h)^2$ 。

第二步：決定 *h*

因為 x^2+2x 中 x 係數是 2，與 $(x+h)^2$ 展開後的 x 係數 $2h$ 相等，也就是 $2h=2$ ，解得 h=1。所以完全平方項是 $(x+1)^2$ 。

第三步：完全平方加減一個數使與原式相等

比較 x^2+2x 和 $(x+1)^2$ ：

原式	完全平方式
x^2+2x	$(x+1)^2=x^2+2x+1$

兩式並不相等：右式須要減 1 才會等於左式。所以

$$x^2+2x=(x+1)^2-1$$

以上便完成了配方，也就是說 x^2+2x 配方的結果是 $(x+1)^2-1$：我們將 x^2+2x 湊成了相等的完全平方再加減一個常數 $(x+1)^2-1$ 。

按照以上步驟，我們再示範一次。假設要做 x^2-4x+1的配方，則

第一步：因為 x^2-4x+1中 x 係數是負號，所以完全平方內要選負號：$(x-h)^2$ 。

第二步：因為 x^2-4x+1中 x 係數（略去正負號不管）是 4，也就是 $2h=4$ ，解得 h=2。所以完全平方項是 $(x-2)^2$ 。

第三步：比較

原式	完全平方式
x^2-4x+1	$(x-2)^2=x^2-4x+4$

兩式並不相等：右式須要減 3 才會等於左式。所以配方的結果是

$$x^2-4x+1=(x-2)^2-3$$

隨堂練習 5

請做以下二次多項式的配方：

(1) x^2+2x+2 (2) x^2-4x-4

[Note. 在課堂上做，還不是 MapleTA 練習。]

前面做的例子都是二次項 x^2 的係數為 1 的情況，也說成**首項係數**為 1；一般而言它不一定是 1。假設要做 $2x^2+x+1$的配方該怎麼辦呢？可以先把二次項的係數 2 提出來，變成 $2(x^2+1/2x+1/2)$ ，刮號裡面的式子就會變成首項係數為 1 的情況。像這類較為複雜的配方，可以叫電腦軟體幫忙。

影片 011

用電腦做配方

二次多項式配方之後的首項係數不變，配方的結果必定是以下形式：

$$ax^2+bx+c=a(x+h)^2+k$$

其中 a, b, c 是已知的數字，我們用電腦解出 h, k；而 a, b, c, h, k 都可能是負數。以典範問題 1 的二次多項式 $-25x^2+9500x$ 為例，配方的結果將是

$$-25x^2+9500x=-25(x+h)^2+k$$

先展開右式

```
expand(-25*(x+h)^2+k);
```

得到結果 $-25x^2-50hx+k-25h^2$。與原式的係數比較，須要

x 的係數相等：$-50h=9500$，常數相等：$k-25h^2=0$

接著，我們要電腦解上述兩條等式，就會得到 h 和 k 了（可以利用複製、貼上功能）。

```
solve([-50*h=9500, k-25*h^2=0]);
```

得到 $h=-190$、$k=902500$。所以 $-25x^2+9500x$ 配方的結果是 $-25(x-190)^2+902500$。

MapleTA 1-5

練習 6

請做以下二次多項式的配方，可用電腦幫忙。

(1) $2x^2-8x+18$ (2) $3x^2+21x+\frac{51}{4}$ (3) $750x^2-144000x+6913400$

[出一些不太簡單，鼓勵學生用電腦做的配方題目。但是不要牽涉根號。]

1-2.2 二次函數的極值

影片 012

學會配方之後，我們從此開始一律將配方的結果寫成以下形式：

$$ax^2+bx+c=a(x-h)^2+k$$

也就是完全平方內使用減號。其理由很快就會明朗。h, k 都可能是負數，舉例而言，當配方後的結果是 $2(x+3)^2-7$ 時，$h=-3$ 而 $k=-7$。

配方有什麼用呢？至少兩項用途：

1. 求得二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的極值：發生最大或最小值的位置，及其值。
2. 了解並草繪二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形。

本節先討論第一點。

就數值來看，我們知道 $(x-h)^2\geq 0$，其最小值就是 0 而且發生在 x=h 的時候。

以上基本事實讓我們做以下推論。

一、如果首項係數$a<0$，則二次函數配方後就是$f(x)=k-|a|(x-h)^2$。可以明顯看出$f(x)$是k扣掉一個非負的數，因此$f(x)\le k$。當$x=h$等號成立，$f(x)$達到最大值k。

二、如果首項係數$a>0$，則二次函數配方後就是$f(x)=k+a(x-h)^2$。可以明顯看出$f(x)$是k加上一個非負的數，因此$f(x)\ge k$。當$x=h$等號成立，$f(x)$達到最小值k。

因此，配方之後，根據首項係數的正負號，就能判斷二次函數$f(x)$在$x=h$處達到的是最大還是最小值，而k就是極值。舉例而言，典範問題 1 的營業額y與定價x之函數關係是$y=f(x)=-25x^2+9500$，配方為$-25(x-190)^2+902500$。因為首項係數$-25<0$，所以當定價$x=190$元時，營業額y達到最大值 902,500 元。

MapleTA 1-6

練習 7

求以下二次函數的極值，以及它發生的位置。

(1) $f(x)=3x^2+21x+\dfrac{51}{4}$　(2) $f(x)=750x^2-144000x+6913400$

[可以跟練習 6 用同一組二次多項式，改問極值。]

練習 8

假設有某種商品準備上市。根據市場調查，若定價為 13,000 元則一個經銷點每週可以賣出 120 台；若定價為 15,000 元則可賣出 95 台。據此資訊，求使得月營業額達到最大的定價。

[典範問題 1 的題型。也在 MapleTA 中提供此題型。]

1-2.3　二次函數的圖形

影片 013

將二次函數$f(x)=ax^2+bx+c$的配方之後，我們可以「以簡馭繁」地通盤了解二次函數的圖形。「以簡馭繁」是數學的思考方法，意思是以簡單的原理駕馭繁複的事物。以下我們將要學會，配方之後的$a(x-h)^2+k$表明：二次函數$y=f(x)$的圖形，總是二次**單項函數**（又稱為二次**冪函數**）$y=ax^2$的平移。只要了解簡單的$y=ax^2$圖形，便可了解一般的$y=ax^2+bx+c$函數圖形。

先討論比較簡單的**上下平移**。考慮兩個函數$y=x^2$與$\hat{y}=x^2+1$，為了方便描述，我們用了$\hat{y}$符號，讀作 y hat（y 戴帽子）。因為$\hat{y}=y+1$，很明顯地$(x,\hat{y})$的圖形比(x,y)高 1 單位。同理，$\hat{y}=x^2-1$的圖形將會比$y=x^2$低 1 單位。比較以下四個函數圖形，它們依序是$f(x)=x^2$、$f(x)=x^2-1$、$f(x)=x^2+1/2$、$f(x)=x^2+2$的函數圖形，看得出它們的上、下平移關係。

[編輯：請如課本所述畫四幅圖。]

一般而言，$y=f(x)+k$ 的圖形就是 $y=f(x)$ 圖形向上平移 k 單位。因為 k 有正負號，我們可以不必說往「下」的平移。當 k<0，向上平移 k 單位的意思就是向下平移 $|k|$ 單位。例如向上平移 –3 單位就是向下平移 3 單位。

再討論稍微複雜的***左右平移***。考慮兩個函數 $y=x^2$ 與 $\hat{y}=(x-1)^2$，觀察以下兩張函數值的表格：

x	y	x	$\hat{y}$
0	0	1	0
0.5	0.25	1.5	0.25
1	1	2	1
1.5	2.25	2.5	2.25
2	4	3	4

[編輯：請做成表格。]

當 $0\le x\le 2$ 時候的 y 值，其實和 $1\le x\le 3$ 時候的 $\hat{y}$ 值是一樣的！這是因為，將 $0\le x\le 2$ 做平方算 y，結果就跟將當 $1\le x\le 3$ 代入 $0\le x-1\le 2$ 做平方算 $\hat{y}$ 是一樣的。如果在 $\hat{y}=(x-1)^2$ 裡代入 $x+1$，則 $\hat{y}=\left((x+1)-1\right)^2=x^2$，可見 (x,y) 和 $(x+1,\hat{y})$ 是高度一樣的兩個點，而 $(x+1,\hat{y})$ 是 (x,y) 向右 1 單位。參照下圖，紅色是 $y=x^2$ 在 $0\le x\le 2$ 內的圖形，藍色是 $\hat{y}=(x-1)^2$ 在 $1\le x\le 3$ 內的圖形，觀察藍色是紅色向右平移 1 單位的結果。

[編輯：請如上述畫一幅圖。]

一般而言，$y=f(x-h)$ 的圖形就是 $y=f(x)$ 圖形向右平移 h 單位。因為 h 有正負號，我們可以不必說往「左」的平移。當 h<0，向右平移 h 單位的意思就是向左平移 $|h|$ 單位。例如 $y=f(x+3)$ 的圖形是 $y=f(x)$ 圖形向右平移 –3 單位，亦即向左平移 3 單位。比較以下四個函數圖形，它們依序是 $f(x)=x^2$、$f(x)=(x+1)^2$、$f(x)=(x-1/2)^2$、$f(x)=(x-1)^2$ 的函數圖形，看得出它們的左、右平移關係。

[編輯：請如課本所述畫四幅圖，每幅都只畫 $0\le y\le 1$ 範圍即可。]

影片 014

綜合以上所學，函數 $y=f(x-h)+k$ 的圖形就是 $y=f(x)$ 圖形向右平移 h 單位、向上平移 k 單位的結果。特殊狀況為 $f(x)=ax^2$，則 $f(x-h)+k$ 就是配方後的 $a(x-h)^2+k$。所以說，一般的二次函數 $y=ax^2+bx+c$，在配方之後即可了解，其圖形都是單項函數 $y=ax^2$ 向右平移 h 單位、向上平移 k 單位的結果。想像用同樣的單位長畫兩幅圖，它們可以完美地重疊在一起。

MapleTA 1-7

隨堂練習 9

若 $y=f(x)$ 的圖形如右圖，試問 [給一幅函數簡圖]

以下何者是 $y=f(x-h)+k$ 的圖形？

(1)　(2)　(3)　(4)

[四選一即可。有些題目使 f(x)是二次函數，但是也可以使用三次函數（圖形顯示反曲點）、$x^{1/3}$、指數、對數、絕對值等函數。畫一個反曲點在 (h,k) 的三次函數的技巧是 $y=a(x-h)^3+b(x-h)+k$，隨意決定 a 和 b。]

影片 015

同學們或許會納悶：只要用電腦便可以看到函數圖形，為何還要學著知道二次函數的長相？這是因為，重點在於「**了解**」。以上學習是對基本數學的了解，它在未來實際工作時很有用。看股票、報價、成本的趨勢圖，或是觀察任何根據數據畫出來的散佈圖，都要有能力判斷函數的次數或其他基本型態，才能推論數據背後的數學模型可能是什麼？看出可能的模型之後，便可以用電腦做計算，推導所須的參數。如果看不出基本的模型，電腦也派不上用場。電腦幫助我們算得更快更準，但同學們還是要了解最核心的知識。

用「平移」觀念來重新了解一次函數的圖形，我們知道任意 $f(x)=ax+b$ 的圖形都是將通過原點的直線 $y=ax$ 向上平移截距 b 的結果，也就是把原點平移到截點 $(0,b)$。而 a 表示直線的斜率，其中

1. 若 $a>0$，直線向右上斜，函數遞增；若 $a<0$，直線向右下斜，函數遞減。
2. $|a|$ 越大，直線越陡。

類似地，我們現在知道任意 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形都是將通過原點的拋物線 $y=ax^2$ 向右平移 h、向上平移 k 的結果，也就是把拋物線的頂點從原點平移到 (h,k)。而首項係數 a 表示開口的方向和寬窄：

1. 若 $a>0$，開口向上，函數**凹向上**；若 $a<0$，開口向下，函數**凹向下**。
2. $|a|$ 越大，開口越窄。

[補插圖。左圖示意 $y=ax^2$，右圖示意平移後的一般圖形，標示頂點坐標]

談論開口寬度，可以只看 $a>0$ 的狀況，因為 $a<0$ 只是將圖形翻下來而已（對 x 軸鏡射）。以水平線 $y=1$ 與拋物線 $y=ax^2$ 的兩交點的距離，來做為判斷開口寬度的依據。很明顯的，兩交點為 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{a}},1\right)$，所以

$$開口寬度=\frac{2}{\sqrt{a}}，$$

可見 $|a|$ 越大，開口的寬度越小。

或許另一個觀點更容易了解開口寬度。想像 $|a|$ 越來越小，最後的狀況就是 a=0。當 a=0 時拋物線退化成水平線，開口寬度是無窮大。可見 $|a|$ 越小開口越寬，反之，$|a|$ 越大開口越窄。同學可在下圖比較 $y=3x^2$、$y=x^2$ 與 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的開口寬度。

[編輯：依以上文意補一幅圖，三種顏色分辨曲線。]

影片 016

二次函數的領導係數

為了比較圖形之間的差異，我們可以在一幅圖上畫幾個不同的函數圖形。例如

```
plot([(1/4)*x^2, (1/2)*x^2, x^2, 2*x^2, 4*x^2],
[x,-2,2],[y,0,4]);
```

可以在 $-2 \le x \le 2$ 和 $0 \le y \le 4$ 範圍內，畫 $y=\frac{1}{4}x^2$ 、 $y=\frac{1}{2}x^2$ 、 $y=x^2$ 、 $y=2x^2$ 、 $y=4x^2$ 的圖形，觀察領導係數 a 對開口寬度的影響：$|a|$ 越大開口越窄。

MapleTA 1-8

隨堂練習 10

以下何者是 $y=4(x+1)^2-2$ 的圖形？

(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

[五選一。選項之一是包含反曲點的三次函數。圖形皆不顯示坐標，學生依頂點所在的象限和開口寬度做判斷。錯誤選項用頂點的相反數，和領導係數的倒數組成。畫一個反曲點在 (h,k) 的三次函數的技巧是 $y=a(x-h)^3+b(x-h)+k$ ，隨意決定 a 和 b。]