1-3 三次函數

影片 017

市場調查和試賣實驗固然因為現實考量而不能做太多次，但是兩次也未免太少了。如果我們比典範問題 1 多做一次實驗，狀況如下，該如何處理呢？

典範問題 2
假設有某種商品準備上市。根據市場調查，若定價為 300 元則一間零售店每月可賣出 2,000 個，若定價 290 元可賣出 2,250 個，定價 280 元可賣出 2,540 個。據此資訊，求使得月營業額達到最大的定價。

根據以上資訊，我們發現不能假設每降價 10 元可以多賣 250 個；因為降 20 元就多賣了 540 個。按照之前的經驗，我們要尋找銷售量 q 跟訂價 x 的函數關係 $q = f(x)$。

在典範問題 2 中，做了三次實驗，在 xq 坐標平面上得到三個點 $(300, 2000)$、$(290, 2250)$ 和 $(280, 2540)$。這三點不在一條直線上，所以 $f(x)$ 並不會是一次函數。我們該怎樣處理這種問題呢？

在高中學過，「原則上」我們可以用三組條件求得三個未知數的解。典範問題 2 給了三組條件，也就是函數 $q = f(x)$ 必須滿足以下三組數據

x	q
300	2000
290	2250
280	2540

而一般的二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 則有三個係數 a、b、c 有待決定，我們可以根據那三組條件決定三個係數，也就是說 $f(x)$（原則上）會是一個二次函數。

怎樣求得滿足上述三個條件的二次函數呢？我們將在 1-3.1 展示一套系統性的方法：**牛頓作法**，得到 $q = 1/5x^2 - 143x + 26900$。而營業額 y 就成了三次函數：

$$y = q \times x = \frac{1}{5}x^3 - 143x^2 + 26900x$$

三次函數的特徵如何？是否在合理的範圍內出現最大值？如果有，怎麼算？我們在 1-3.2 探討這些問題。

1-3.1 插值多項式的牛頓作法

我們預期找到一個滿足右側表格之條件的二次函數 $q = f(x) = ax^2 + bx + c$。從 1-1 我們知道前兩個條件決定了一次多項式 $-25x + 9500$。牛頓的聰明辦法是，

[編輯：將前面的表格複製排版在此。]

不要干擾已經做好的部分，於是假設

$$q=a(x-300)(x-290)-25x+9500 \text{，}$$

如此一來，代入 $x=300$ 或 $x=290$，都會消除第一項（新增的那一項），剩下已知的 $-25x+9500$。現在，代入第三個條件，就得到等式

$$2540=a(280-300)(280-290)-25x+9500 \text{，}$$

可以解得 $a=1/5$。雖然以上只是一元一次方程式，我們都會解，但還是可以委託電腦代勞。

代入數值之後解方程式

二次方程式 $q=a(x-300)(x-290)-25x+9500$ 本來有三個未知數 x、q 和 a，但是一條方程式只能解出一個未知數。我們可以代入其中兩個 $x=280$ 和 $q=2540$，求解未知數 a；指令如下。

```
solve([q=a*(x-300)*(x-290)-25*x+9500, x=280, q=2540]);
```

解得 $a=1/5$。如果想要看到多項式的標準形式，可以展開它：

```
expand((1/5)*(x-300)*(x-290)-25*x+9500);
```

得到結果 $q=f(x)=\frac{1}{5}x^2-143x+26900$。

一般而言，給定 n 個條件，「通常」可以決定一個 $n-1$ 次多項式函數；其中 n 是個正整數。我們強調「通常」是因為有時候辦不到。那些「辦不到」的例外情況很少發生，而且用電腦求多項式係數的時候就會察覺：解出來首項係數等於 0。所以，我們不在此討論那些例外狀況。

令 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、…、$P_n(x_n,y_n)$ 是 xy 坐標平面上的 n 個點，給定 n 個條件：當 $x=x_k$ 時 $y=y_k$，找一個 $n-1$ 次多項式函數 $y=f(x)$ 使其滿足那 n 個條件，相當於使其圖形通過那 n 個點。這樣的 $f(x)$ 稱為滿足那 n 個條件或通過那 n 個點的**插值多項式**。我們有不只一種求插值多項式的作法，不論哪種作法「通常」做出來的結果（寫成標準式之後）都是一樣的。以下我們藉用 Maxima 指令講解插值多項式的牛頓作法。

影片 018

插值多項式的牛頓作法

從兩點 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 開始，用第一點寫成含未知數 a_1 的一次方程式 $y=a_1(x-x_1)+y_1$，代入 $x=x_2$ 和 $y=y_2$ 求解 a_1。例如，若函數 $y=f(x)$ 通過 $P_1(3,1)$ 和 $P_2(-1,2)$ 兩點，則用以下指令求解 a_1。

```
solve([y=a1*(x-3)+1, x=-1, y=2]);
```

解得 $a_1=-1/4$。用滑鼠複製貼上的技術展開它，

```
expand((-1/4)*(x-3)+1);
```

得到一次式$\frac{7}{4}-\frac{x}{4}$。

如果函數$y=f(x)$還須通過第三點$P_3(x_3,y_3)$，則用前兩點寫成含未知數a_2的二次方程式

$$y=a_2(x-x_1)(x-x_2)+[\text{剛才算出來的一次式}]，$$

可以用滑鼠操作，貼上剛才求得的一次式，再代入新資訊$x=x_3$和$y=y_3$求解a_2。例如，若函數$y=f(x)$又通過$P_3(0,7)$點，則用以下指令求解a_2。

```
solve([y=a2*(x-3)*(x+1)+7/4-x/4, x=0, y=7]);
```

解得$a_2=-7/4$。用滑鼠複製貼上的技術展開它，

```
expand((-7/4)*(x-3)*(x+1)+7/4-x/4);
```

得到二次式$-\frac{7}{4}x^2+\frac{13}{4}x+7$。

如果函數$y=f(x)$還須通過第四點$P_4(x_4,y_4)$，則用前兩點寫成含未知數a_3的三次方程式

$$y=a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+[\text{剛才算出來的二次式}]，$$

再代入新資訊$x=x_4$和$y=y_4$求解a_3。例如，若函數$y=f(x)$又通過$P_4(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$點，則用以下指令求解$a_3$。

```
solve([y=a3*(x-3)*(x+1)*x -(7*x^2)/4+(13*x)/4+7, x=1/2,
y=-1/2]);
```

解得$a_3=139/30$。用滑鼠複製貼上的技術展開它，

```
expand((139/30)*(x-3)*(x+1)*(x)-(7*x^2)/4+(13*x)/4+7);
```

得到三次式$\frac{139}{30}x^3-\frac{661}{60}x^2-\frac{213}{20}x+7$。

如果不再有新的條件了，則得到結論：通過$P_1(3,1)$、$P_2(-1,2)$、$P_3(0,7)$、$P_4(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$四點的函數$y=f(x)$是$f(x)=\frac{139}{30}x^3-\frac{661}{60}x^2-\frac{213}{20}x+7$。

MapleTA 1-9

隨堂練習 11

試求通過$P_1(2,30)$、$P_2(-2,2)$、$P_3(7,-70)$三點的二次函數。

[Ans. $y=-3x^2+7x+28$]

[填充題。可以從答案倒推通過的點來出題。答案勿超過三次，也不要出退化狀況的題目。]

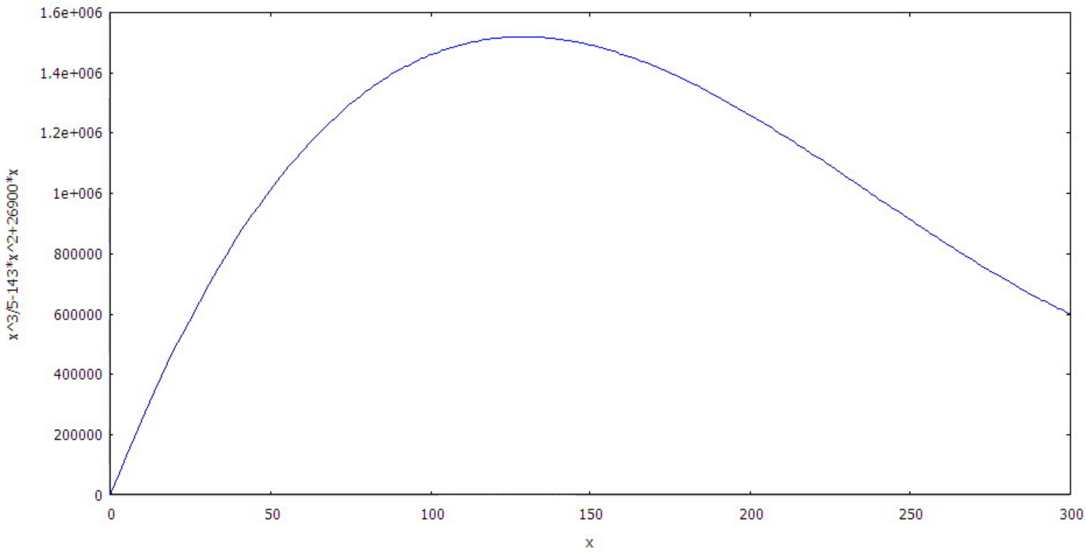
影片 019

1-3.2 三次函數的圖形特徵

經過前面的計算，我們知道典範問題 2 之營業額 y 是定價 x 的三次函數：

$$y = q \times x = \frac{1}{5}x^3 - 143x^2 + 26900x$$

利用電腦可以繪製 y 在合理範圍 $0 \le x \le 300$ 之內的圖形如下。



根據圖形，可以「目測」當定價大約 130 元時，達到最大營業額約 150 萬元。但是，這一次目測的結果，不再像典範問題 1 的那樣肯定。事實上，我們將會知道真正的解是

$$當\ x = \frac{715 - 5\sqrt{4309}}{3} \approx 128.928\ldots,發生極大值\ y \approx 1{,}519{,}775。$$

雖然實務上我們可以接受近似的解 $x = 130$ ，同學們應了解：若能確定真解，然後取近似值，會讓人更為放心。

現在，我們先把最大值的問題擱置一旁，因為有必要對三次函數圖形有一些初步的認識。按照處理二次函數圖形之「以簡馭繁」精神，我們可以透過「配三方」的手法將任意三次多項式 $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 改寫成相等的形式

$$a_3(x-h)^3 + m(x-h) + k\ 。$$

透過對函數圖形平移的瞭解，我們知道 $y = a_3(x-h)^3 + m(x-h) + k$ 的圖形就是 $y = a_3x^3 + mx$ 向右平移 h、向上平移 k 的結果。簡言之，任意三次函數的圖形，必定是 $y = ax^3 + bx$ 這種形式之函數的平移。

影片 020

在我們探討 $y = ax^3 + bx$ 圖形特徵之前，先談一下「配三方」。我們僅在此簡介，雖然可以用電腦幫忙做，但並不要求同學們計算。複習三次公式

$$(x-h)^3 = x^3 - 3hx^2 + 3h^2x - h^3\ ，$$

比較$a_3(x-h)^3$和$a_3x^3+a_2x^2$之係數，發現當$-3a_3h=a_2$時，就可以抵銷x^2項的係數。解得$h=-\dfrac{a_2}{3a_3}$。也就是說，令$h=-\dfrac{a_2}{3a_3}$則

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=a_3(x-h)^3+m(x-h)+k\text{，}$$

其中m和k也可以用電腦幫忙解出來。

至於$y=ax^3+bx$之圖形特徵，讓我們繼續發揮「以簡馭繁」精神，先討論$|a|=|b|=1$之基礎狀態。複習單項函數$y=x$和$y=x^3$之圖形如下：

[編輯：畫圖並標示 y=x 和 y=x^3]

$y=x^3+x$的圖形就好比將$y=x^3$之圖形朝著右上方、左下方「扭」一下，如以下之左圖。而$y=x^3-x$的圖形就好比將$y=x^3$之圖形朝著反方向「扭」一下，如以下之右圖。

[編輯：畫圖並標示 y=x^3+x　和 y=x^3-x]

至於$y=-x^3-x=-\left(x^3+x\right)$，而$y=-x^3+x=-\left(x^3-x\right)$，而它們的圖形就分別是$y=x^3+x$和$y=x^3-x$對稱於$x$軸做上下鏡射的結果，如下圖。

[編輯：畫圖並標示 y=-x^3-x　和 y=-x^3+x]

在性質上，$y=ax^3+bx$之圖形，當 a、b 同號的時候，就像$y=x^3+x$或者$y=-x^3-x$，而當a、b同異號的時候，就像$y=x^3-x$或者$y=-x^3+x$。它們展現的圖形特徵，綜合整理於下。

影片 021

- ***對稱於原點*** $y=ax^3+bx$之圖形對稱於原點；也就是說，對x軸和y軸各做一次鏡射之後，圖形不變。在高中學過，這種函數稱為**奇函數**。因為ax^3+bx的次方都是奇數（1 和 3），也可以知道$f(x)=ax^3+bx$是奇函數。以下圖示以$y=x^3+x$為例。

[編輯：畫圖 y=x^3+x，向右箭頭上寫「對 x 軸鏡射」，畫圖，再一個箭頭上面寫「再對 y 軸鏡射」，畫圖。左右兩側的圖一樣]

- ***原點是反曲點*** 因為對稱於原點，所以$y=ax^3+bx$圖形的「彎曲方向」在原點的左右兩側必定會相反。在高中學過，兩側之彎曲方向相反的點，稱為圖形的**反曲點**。$f(x)=ax^3+bx$的圖形必有一個反曲點，它就在原點。以下圖示以$y=x^3-x$為例。

[編輯：畫圖 y=x^3-x，右側標示『向上彎曲』，左側標示『向下彎曲』。]

- **沒有最大或最小值** $y=ax^3+bx$ 之圖形不再像拋物線有一個頂點，所以也就沒有最大值或最小值。

- **有時候全部遞增或遞減** 當 a、b 同號的時候，$y=ax^3+bx$ 之圖形總是單調的：例如 $f(x)=x^3+x$ 總是遞增的，而 $f(x)=-x^3-x$ 總是遞減的。

- **有時候會遞增轉遞減** 當 a、b 異號的時候，$y=ax^3+bx$ 之圖形會有兩個「轉折」。在轉折處的兩側，函數圖形改變了遞增或遞減的趨勢。以下圖示以 $y=-x^3+x$ 為例。

[編輯：畫圖 y=-x^3+x，用小箭頭標示兩個「轉折」，並標示最左邊的函數圖形遞減，中段遞增，右段遞減。]

MapleTA 1-10

隨堂練習 12
以下何者是 $y=4x^3-2x$ 的圖形？（假設圖形在顯示區域之外不再有轉折。）
(1) (2) (3) (4) (5)
[五選一。每個圖形都通過原點。選項之一根本就是一次或二次函數。錯誤選項用係數的相反數或倒數組成。]

因為一般的三次函數

$$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=a_3(x-h)^3+m(x-h)+k$$

所以函數圖形總是 $y=a_3x^3+mx$ 的平移，而且原點 $(0,0)$ 被平移至 (h,k)。所以，我們現在了解，三次函數的圖形有以下特徵。

- **必有一個反曲點** 也就是點 (h,k)。

- **圖形對稱於反曲點** 而且，在對稱點的兩側，圖形彎曲的方向相反。

- **有時候單調，有時候轉折** 總是遞增或遞減的情況，統稱為單調。

MapleTA 1-11

隨堂練習 13
以下何者可能是 $f(x)=4x^3+x^2-2x-1$ 的函數圖形？（假設圖形在顯示區域之外不再有轉折。）[提示：雖然我們不知道配三方之後的 m、h 和 k，但是知道首項係數不變：$a_3=4>0$，而且 $f(0)=-1$。]
(1) (2) (3) (4) (5)
[五選一。錯誤選項之一是一次或二次函數，之二是指數或對數函數。另外兩個錯誤選項是三次函數，但是首項係數與 a_3 異號，或者與 y 軸交點不正確。]

當 $f(x)=ax^3+bx$ 的圖形有轉折的時候，因為圖形的對稱性，必有一個轉折像山峰：比附近的曲線高，另一個像山谷：比附近的曲線低。如下圖。

[編輯：畫圖 y=x^3-x 和 y=-x^3+x 用小箭頭標示山峰和山谷。]

如果函數圖形在點$(c, f(c))$發生山峰（的峰頂），我們說 $f(x)$ 在 $x=c$ 處發生相對極大值或局部極大值，簡稱**極大值**，而其極大值就是 $f(c)$。類似地，如果函數圖形在點$(c, f(c))$發生山谷（的谷底），我們說 $f(x)$ 在 $x=c$ 處發生相對極小值或局部極小值，簡稱**極小值**，而其極小值就是 $f(c)$。極大值或極小值，又合稱為**極值**。

回顧二次函數圖形的頂點，也是發生極大值或極小值的位置，所以極值的觀念涵蓋了最大或最小值的觀念。學到這裡，我們可以對比一次、二次和三次函數的異同。

1. 一次函數 $f(x)=mx+k$ 沒有極值，也沒有反曲點（其中 $m\neq 0$）。
2. 二次函數必有一個極值，但是三次函數未必有極值。如果三次函數有極值，則必有一個極大值和一個極小值。
3. 三次函數必有一個反曲點，但是二次函數沒有反曲點：拋物線的開口方向是固定的，彎曲的方向也不會改變。

我們已經知道，典範問題 2 產生的三次函數 $f(x)=\dfrac{1}{5}x^3-143x^2+26900x$ 在 $x\approx 130$ 附近一個極大值。現在，我們知道其實它也一定有個極小值。雖然函數 $f(x)$ 在其他位置有比 $f(130)$ 更大的值，例如 $f(500)$ 的數值更大。但是，定價 500 元已經不在我們考慮的合理範圍內，所以不須討論。

既然三次函數不一定有極值，接下來的問題是，如何確定三次函數有沒有極值？如果有，怎麼算出來？利用「配三方」的技術，已經無法全面性地解決這個問題了。我們須要新的方法：「微分」，請看下一章。

綜合習題

[蕭老師：請抓一些 Maple 的題目，印在這裡。另外，文字應用題，仿典範問題 1、2，以及參考商用微積分課本、國中課本，出一些二次函數可解的極值問題，或者出一些用電腦畫圖可觀察的三次函數問題，或者插值多項式問題。數據可以大一些，引導學生去用電腦。謝謝。]