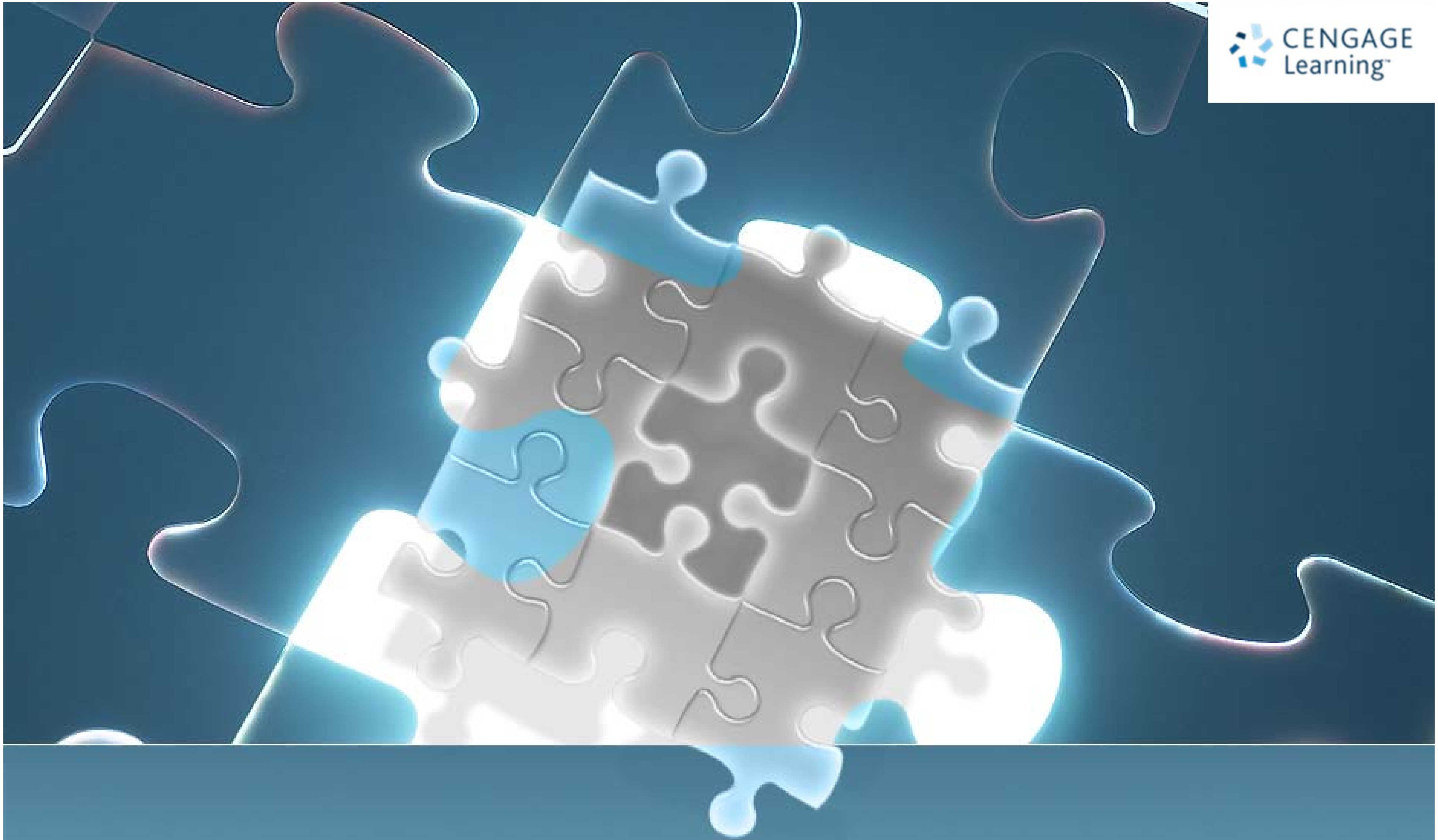


第 1 章

直線和線性函數

1.1 笛卡兒座標系統
笛卡兒座標系統

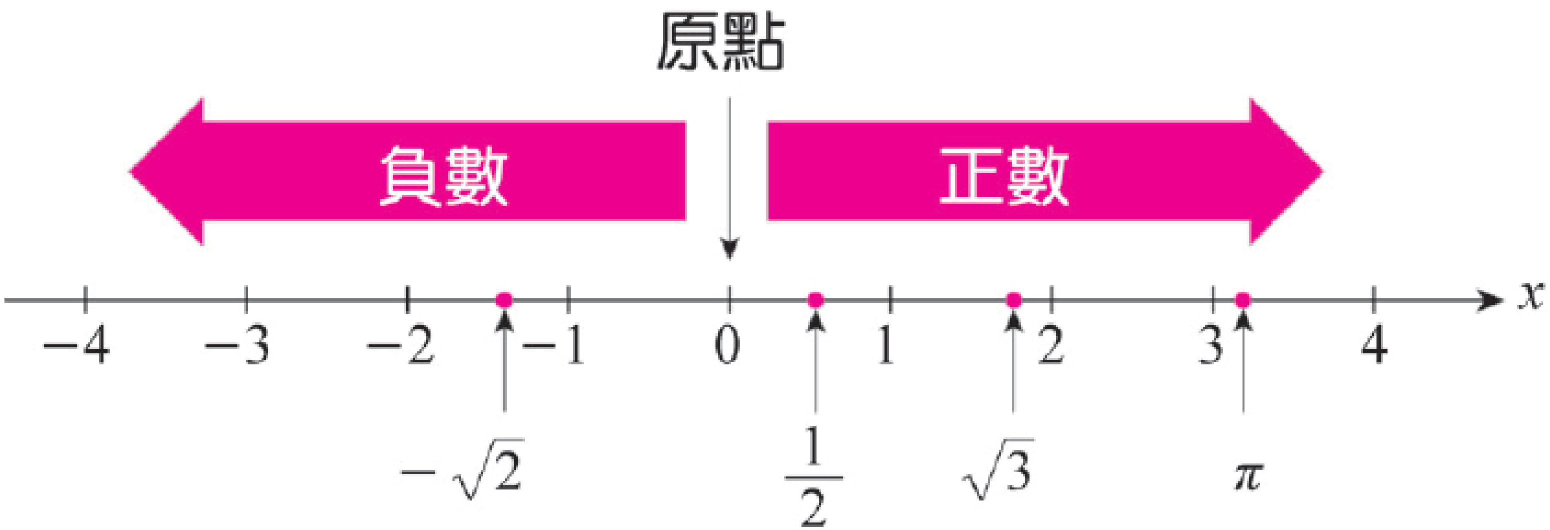


圖 1　實數線

笛卡兒座標系統

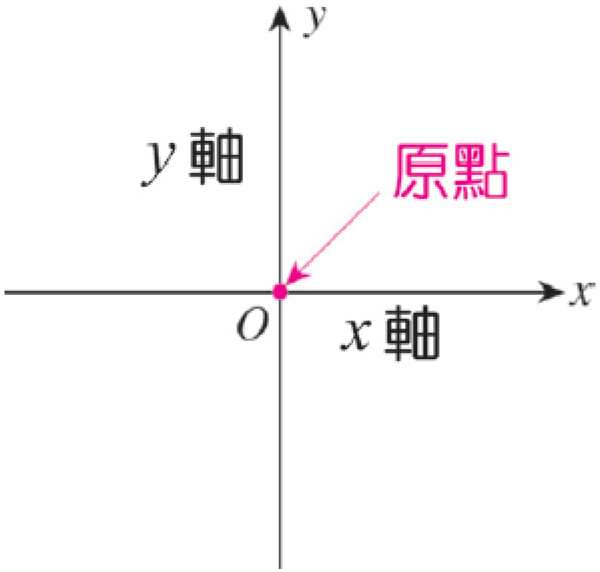


圖 2　笛卡兒座標系統

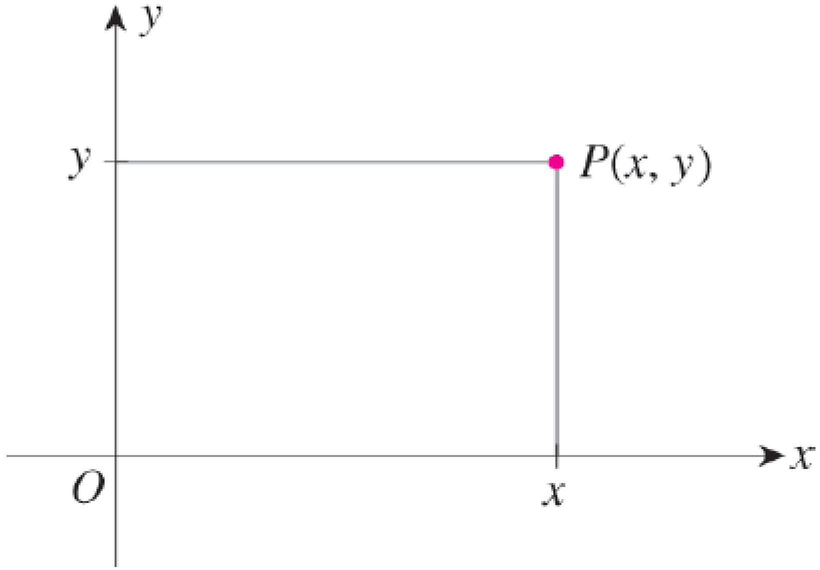


圖 3　座標平面的有序實數對 (x, y)

CENGAGE Learning

笛卡兒座標系統

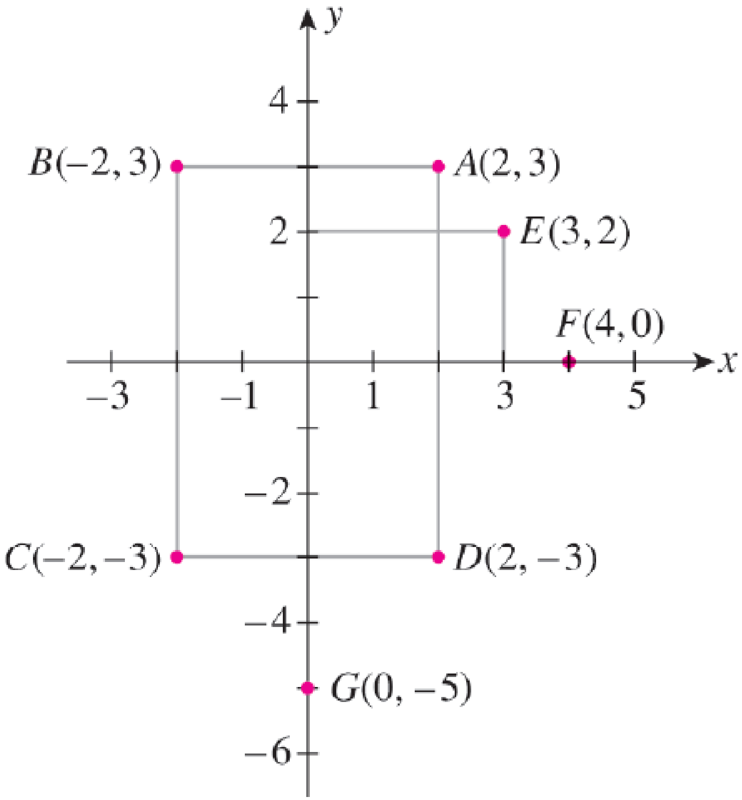


圖 4　座標平面上的部分點

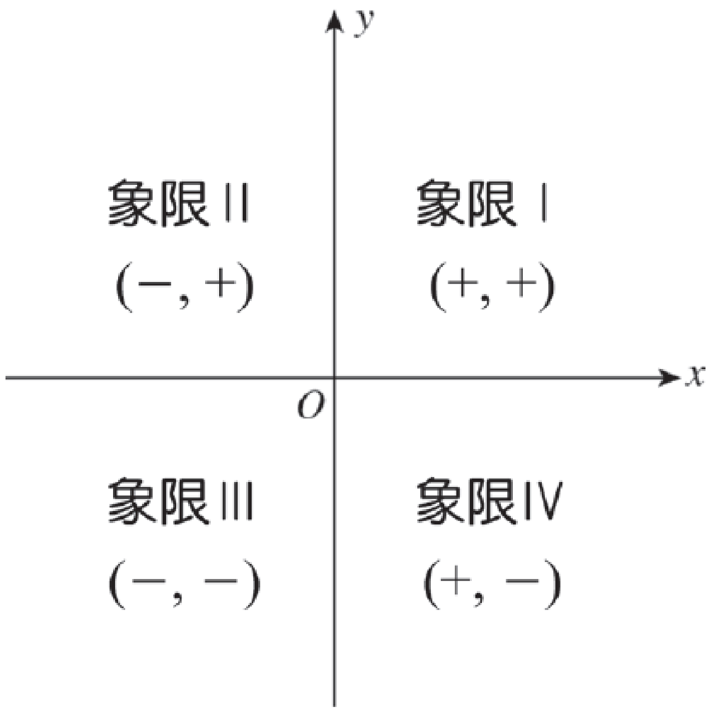


圖 5　座標平面上的四個象限

距離的公式

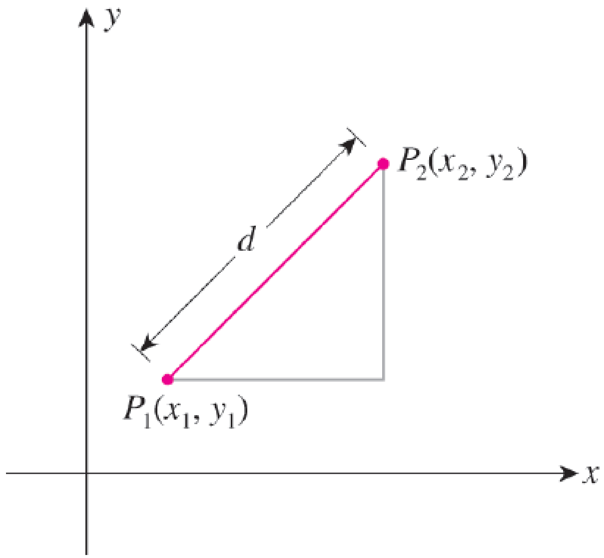


圖 6　座標平面上兩點的距離 d

距離的公式

平面上的兩點 $P_1\,(x_1, y_1)$ 與 $P_2\,(x_2, y_2)$ 之間的距離 d 為

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

例題 1

- 試求(–4, 3) 與(2, 6)兩點之間的距離。

例題 2

- 令$P(x, y)$是圓上的一點，此圓半徑為r，中心點為$C(h, k)$，請找出 x 與 y的關係式。

距離的公式

圓方程式

圓心$C(h, k)$，半徑為r的圓方程式(equation of a circle)為

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad (2)$$

例題 3

- 找出下列的圓方程式：

  a.半徑為2，圓心在$(-1, 3)$。

  b.半徑為3，圓心在原點。

1.2 直線
線的斜率

- 假設L是通過相異兩點(x_1, y_1) 及(x_2, y_2) 的唯一線。若$x_1 \neq x_2$，則L斜率(slope) 定義如下：

非垂線的斜率

假設L是條非垂線(nonvertical line)且通過兩相異點(x_1, y_1)及(x_2, y_2)，則可計算其斜率m

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

參見圖9。

線的斜率

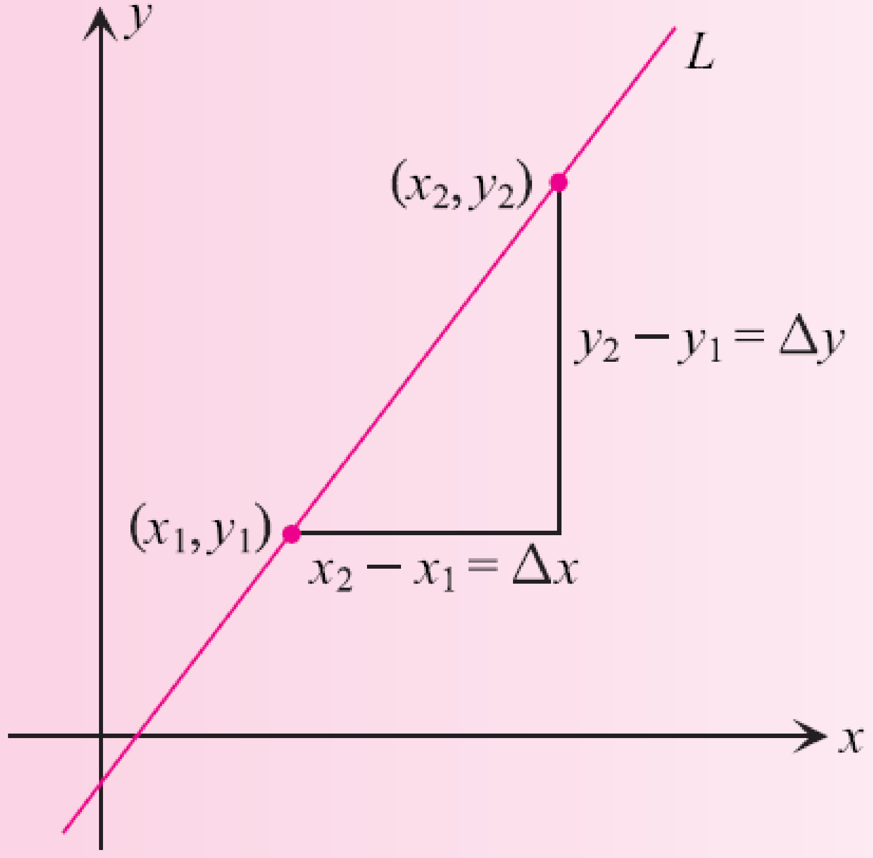


圖 9

線的斜率

- 若$x_1 = x_2$，則L是一條垂線(vertical line)，其斜率無定義(undefined)，見圖10。

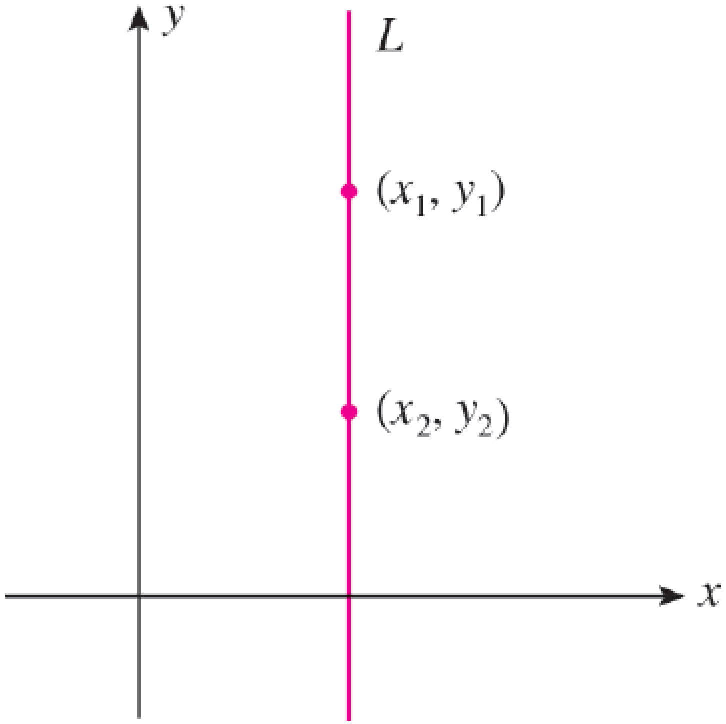
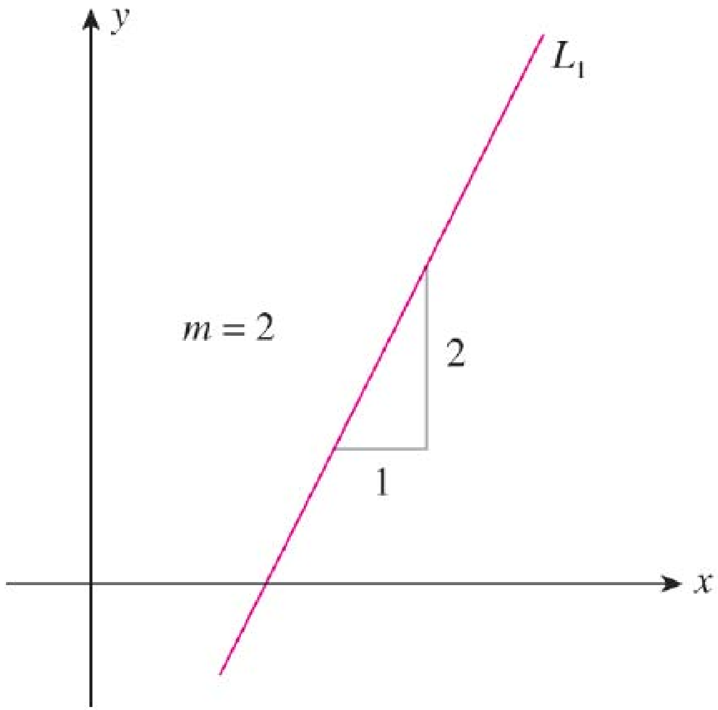
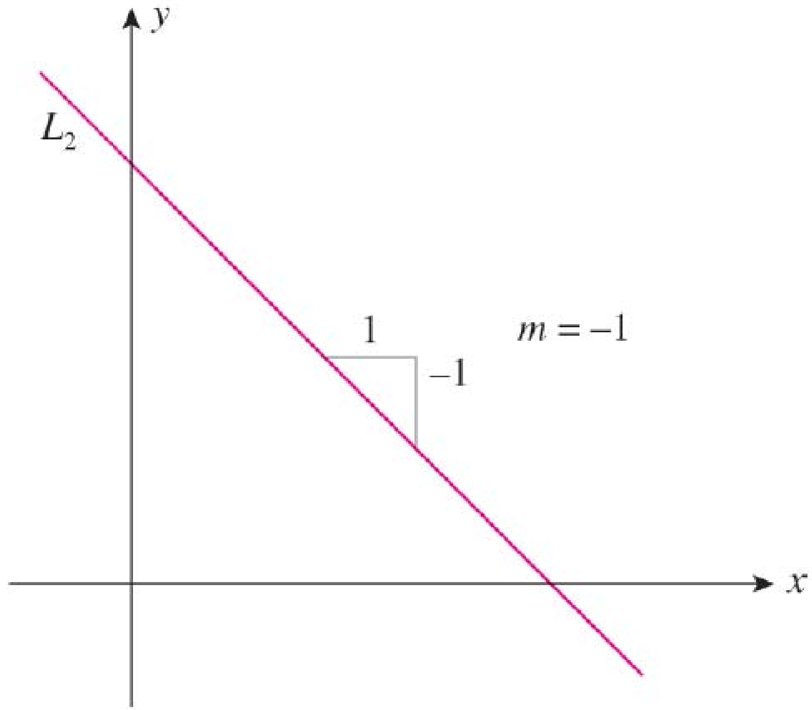


圖 10　此 L 線的斜率無定義

線的斜率



(a) 往上升的線 ($m > 0$)



(b) 往下降的線 ($m < 0$)

圖 11

線的斜率

- 圖12 顯示出一群通過原點的直線及其斜率，由圖中可以很明顯看到斜率的正負與線的走向關係。

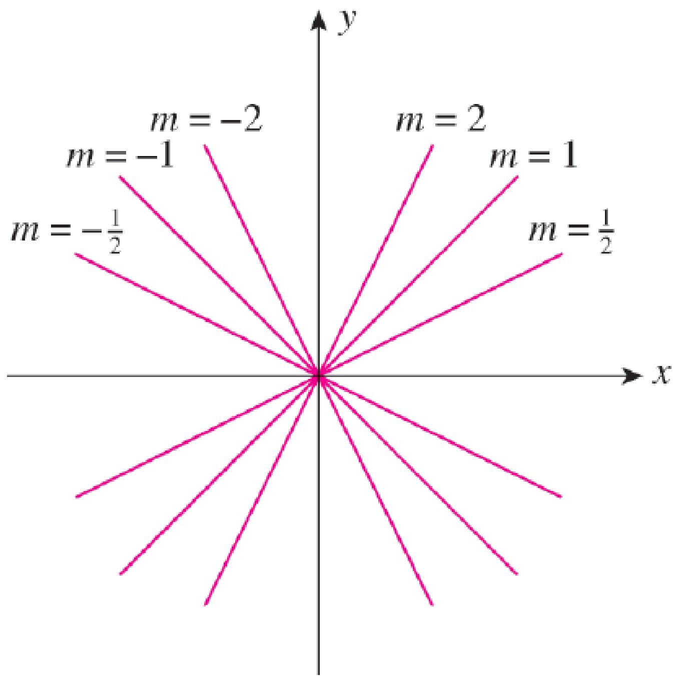


圖 12　一群通過原點的直線

例題 1

- 畫出通過點$(-2, 5)$，斜率為 $-\frac{4}{3}$ 的直線。

例題 2

- 一直線通過點$(-1, 1)$與$(5, 3)$，找出其斜率m。

例題 3

- 找出通過點$(-2, 5)$與$(3, 5)$的直線斜率。

線的斜率

- 從上例可知水平線(horizontal line)的斜率是0。此外，我們可從兩線的斜率判斷它們是否平行。

平行線

相異的兩條線互相**平行(parallel)**，若且唯若其斜率相等或均無定義。

例題 4

- 令L_1為通過點(–2, 9) 與(1, 3) 的線，L_2為通過點(–4, 10) 與(3, –4) 的線，試問L_1與L_2是否平行？

線方程式

- 令L為平行於y軸(垂直於x軸)的直線，則L切過x軸的$(a, 0)$點，其x座標必然是$x = a$，a為任意的實數。所以，L的線方程式可寫成

$$x = a$$

L即是垂線。例如，圖17的兩條垂線，其線方程式分別為$x = -2$ 及$x=3$。

線方程式

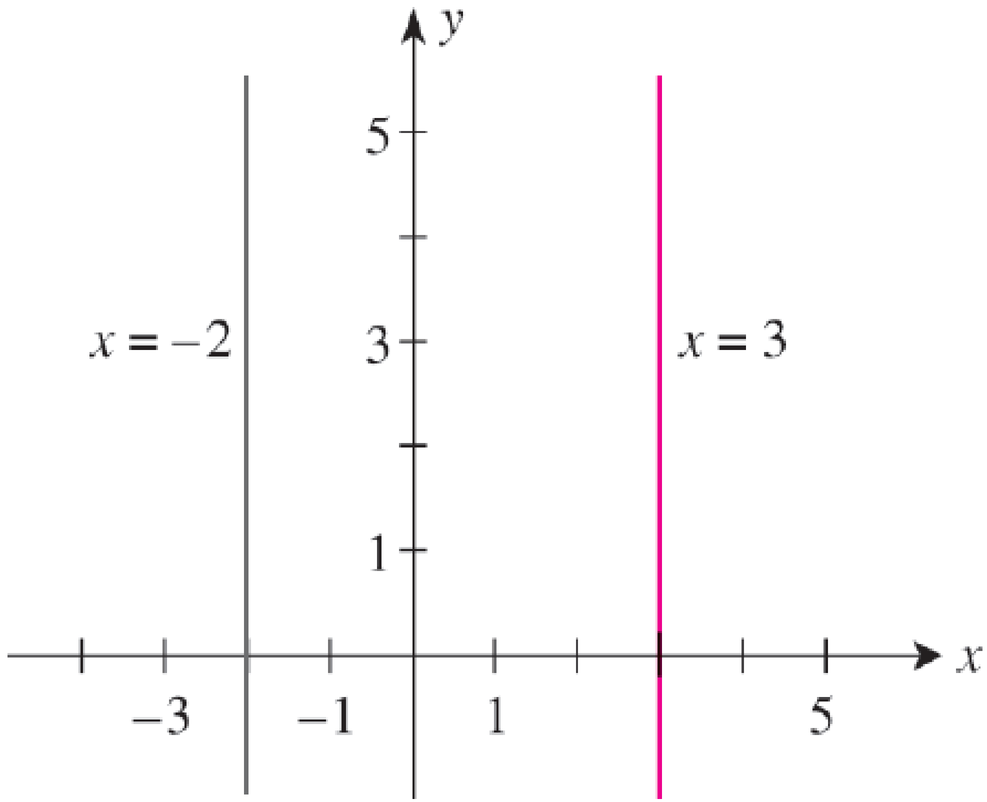


圖 17　$x = -2$ 及 $x = 3$ 的垂線

線方程式

- 假設L是一條非垂線，其斜率為m，(x_1, y_1) 為線上的一個點。令(x, y) 是L線上另一點，則由公式(3)可得

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

交叉相乘後，即得下列點斜式(point-slope form)方程式(4)。

點斜式

已知一直線的斜率是m，且通過點(x_1, y_1)，則其線方程式為

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (4)$$

例題 5

- 一直線通過點(1, 3)，斜率為2，求其線方程式。

例題 6

- 一線通過點(–3, 2) 與(4, –1)，求其線方程式。

線方程式

互相垂直的線

若L_1與L_2為相異的兩條非垂線，斜率分別為m_1與m_2，則L_1與L_2互相**垂直(perpendicular)** (寫成$L_1 \perp L_2$)若且唯若

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

例題 7

- 一線通過點(3, 1) 並與例題5 之直線垂直，寫出其線方程式。

線方程式

- 若一直線L不是水平線也不是垂線，它必然與x軸和y軸相交。假設L與x軸交於$(a, 0)$，與y軸交於$(0, b)$，則a, b分別稱為線L的x截距(x-intercept)與y截距(y-intercept)，參見圖20。

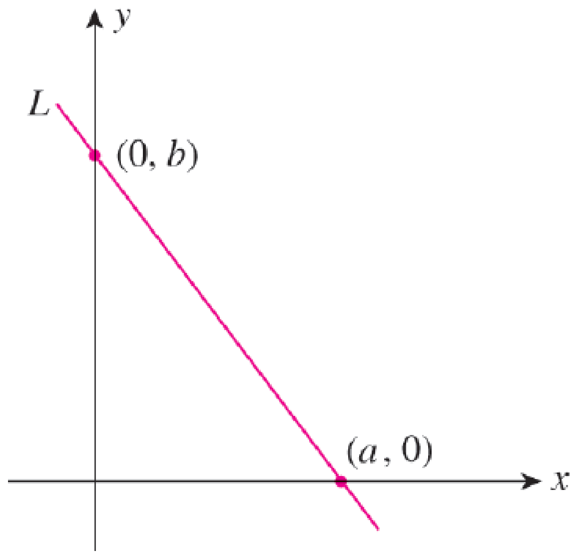


圖 20　線 L 的 x 截距為 a，y 截距為 b

線方程式

- 令L直線的斜率為m，y截距為b。因L經$(0, b)$的點，故由點斜式(即公式(4))可得

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b$$

該式稱為斜截式(slope-intercept form)。

斜截式

一直線的斜率是m且與y軸相交於$(0, b)$，則其線方程式為

$$y = mx + b \tag{5}$$

例題 8

- 一直線的斜率是3，y 截距是4，寫出其線方程式。

例題 9

- 給定線方程式$3x-4y=8$，找出該線的斜率及y截距。

例題 10 運動器材的銷售額

- 某地區一家運動器材店銷售經理繪製了過去5年的銷售圖，並發現資料點約形成一條直線(見圖21)。請用第一年與第五年的資料點找出其趨勢線(trend line)，並預測第六年的銷售額。

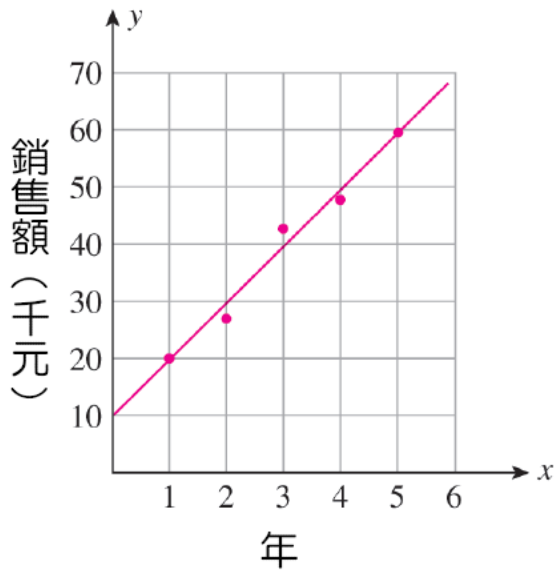


圖 21 運動器材店的銷售圖

線方程式的一般式

線方程式的一般式

含x, y變數的一般式線性方程式為

$$Ax + By + C = 0 \tag{6}$$

其中，A, B, C是常數且A, B至少有一數不為0。

一直線的方程式一定是線性方程式；同時，每一線性方程式恰好代表著一條直線。

例題 12

- 畫出$3x - 4y - 12 = 0$ 的線。

線方程式的一般式

直線方程式

垂線：$x = a$

水平線：$y = b$

點斜式：$y - y_1 = m(x - x_1)$

斜截式：$y = mx + b$

一般式：$Ax + By + C = 0$

1.3 線性函數與數學模型
數學模型

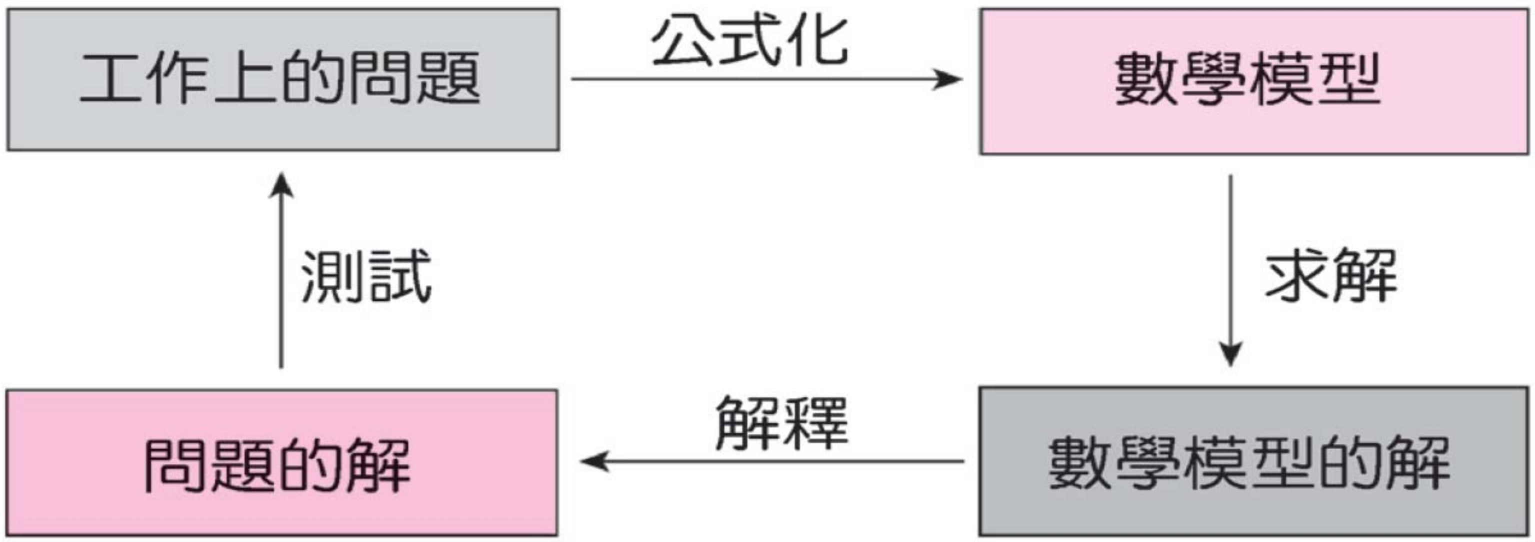


圖 23　解決問題的 4 個步驟

CENGAGE Learning

函數

函數

函數(function) f 定義了 x 與 y 之間的對應規則，每個 x 值對應一且唯一的 y 值。

線性函數

我們稱函數 $f(x) = mx + b$ 為**線性函數(linear function)**，其中 m 和 b 為任意的常數。

例題 1 美國健康照護花費

- 由於美國高齡人口快速成長，預期未來幾十年其健康照護花費將明顯增加。下表列出美國2008-2013年的健康照護花費(單位：兆元)，2009年以後為預估值：

年，t	2008	2009	2010	2011	2012	2013
花費，y	2.34	2.47	2.57	2.70	2.85	3.02

- 表中的數據可以下列數學模型描述：

$$S(t) = 0.134t + 2.325$$

其中t代表年份，起始年($t = 0$) 為2008 年。

例題 1 美國健康照護花費（續）

a. 繪出函數S的圖形。

b. 假設這個趨勢繼續維持下去，2014年(即$t = 6$)時，美國健康照護花費估計為若干？

c. 試問自2008 至2013 年期間，美國健康照護花費的增加速率為何？

資料來源：Centers for Medicare & Medicaid Services.

例題 2 線性折舊

- 一台網路伺服器的初始價值是10,000元，經線性折舊5年後的殘值為3,000元。

  a. 寫出其帳面價值的函數，以t代表折舊的年份。

  b. 2年後該網路伺服器的帳面價值若干？

  c. 此網路伺服器的折舊速率為何？

線性成本、線性收入及線性利潤函數

成本函數、收入函數及利潤函數

令x代表產品的生產量或銷售量，則**成本函數(cost function)** 為

$C(x)$ = 生產x個產品的總成本

收入函數(revenue function) 為

$R(x)$ =銷售x個產品的總收入

利潤函數(profit function) 為

$P(x)$ = 生產並銷售x個產品得到的總利潤

例題 3 利潤函數

- 某家濾水器製造商的固定成本為每月20,000 元，單位生產成本為20元，單位售價為30元，請列出該製造商的成本、收入及利潤函數。

例題 4 需求函數

- 一鬧鐘在單位價格8 元時需求量是48,000個，單位價格12元時需求量降到32,000 個。

  a.在線性的假設下，請寫出需求方程式。

  b.當需求量為40,000個時，單位價格為多少？

  c.若單位價格為14元，則需求量是多少？

例題 5 供應函數

- 一商品的供應方程式為$4p - 5x = 120$，p的單位是元，x的單位是100。

  a. 試繪出供應曲線。

  b. 試問單位價格55 元時，供應量為多少？

1.4 直線的交點
尋找二線的交點

- 實務上有些問題的解就在兩線的交點(intersection)上。以下我們說明如何以代數的方法解二直線的交點。令L_1, L_2代表兩條直線，其線方程式分別為

$$y = m_1x + b_1$$
$$y = m_2x + b_2$$

其中m_1, b_1, m_2, b_2是常數，兩直線交於$P\,(x_0, y_0)$，如圖30。

尋找二線的交點

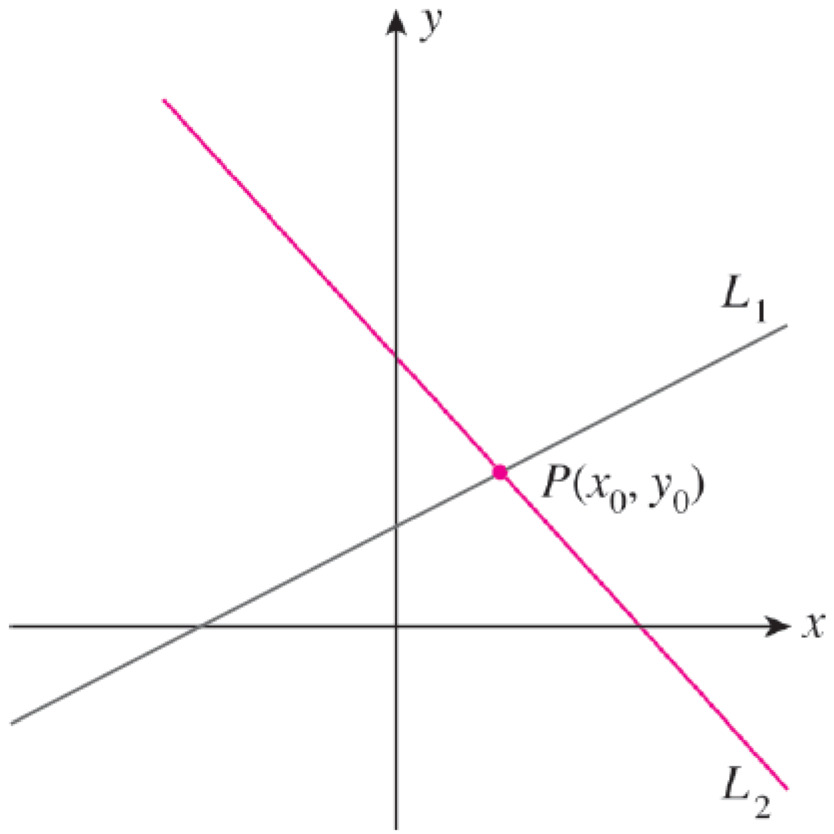


圖 30　線 L_1 和 L_2 相交於 $P\,(x_0, y_0)$

例題 1

- 請找出二直線$y = x+1$ 與$y = 2x + 4$ 的交點。

損益兩平分析

- 假設公司的成本、收入及利潤函數均為線性，其方程式如下：

$$C(x) = cx + F$$

$$R(x) = sx$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$= (s - c)x - F$$

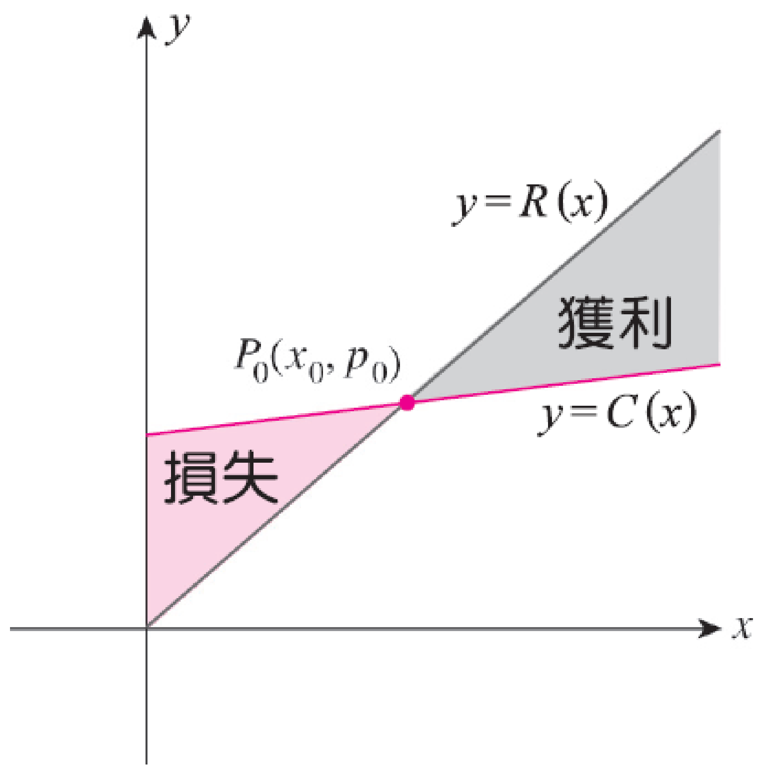


圖 32　P_0 為損益兩平點

例題 2 損益兩平水準

- 培特公司的產品單位生產成本是4 元，每個售價10 元，已知公司每月的固定成本為12,000 元，試求其損益兩平點。

例題 3 損益兩平分析

- 承例題2 回答下列問題：

  a. 如果培特公司每個月僅生產並銷售1,500 個產品，公司的損失會是多少？

  b. 如果每個月生產並銷售3,000 個產品，公司的利潤會是多少？

  c. 培特公司應生產多少個產品才能保證至少有9,000元的獲利？

例題 4 決策分析

- 羅森公司的管理階層必須在兩種製造程序中做選擇。兩種程序其月成本函數分別為$C_1(x) = 20x + 10{,}000$ 以及$C_2(x) = 10x + 30{,}000$，其中x為產品的生產量。今知產品單價為40元，且預計月銷售量是800個，則公司的管理階層應選擇何種程序以使利潤最大？

市場均衡

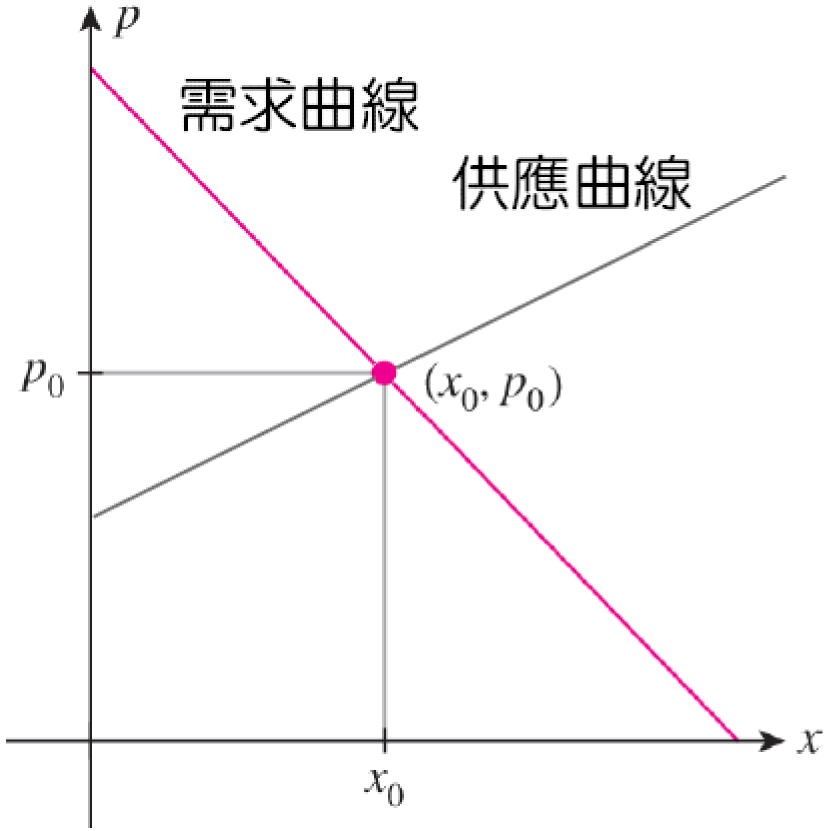


圖 34　市場於 (x_0, p_0) 點達到均衡

例題 6 市場均衡

- 溫馬公司專門生產掛壁式溫度計，其產品的需求方程式為

$$5x + 3p - 30 = 0$$

供應方程式為

$$52x - 30p + 45 = 0$$

其中，x為需求數量(單位：1,000 個)，p為溫度計之單價。請找出均衡數量與價格。

例題 7 市場均衡

- 某一廠牌的DVD 播放機在單價260元時，需求量為8,000台；於單價200元時，需求量增加為10,000台。又知單價低於100元時，製造商將不供應商品；但單價高於100元時每提升50元，製造商將增加1,000台的供應量。今假設需求與供應方程式均為線性。

  a. 寫出需求方程式。

  b. 寫出供應方程式。

  c. 找出均衡數量與價格。

1.5 最小平方法

斜截式最小平方法

假設有以下 n 個資料點

$$P_1\,(x_1, y_1)\,,\,P_2\,(x_2, y_2)\,,\,P_3\,(x_3, y_3)\,,\ldots\ldots,\,P_n\,(x_n, y_n)$$

其最小平方線(或迴歸線)方程式為

$$y = f(x) = mx + b$$

其中，m與b由正規方程組(normal equations) (9)與(10)求解而得

$$nb + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)m = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \qquad (9)$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)b + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^x)m$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \qquad (10)$$

CENGAGE Learning

1.5 最小平方法
例題 1

- 找出下列資料點之最小平方線

  $P_1(1, 1), P_2(2, 3), P_3(3, 4), P_4(4, 3), P_5(5, 6)$

例題 2 美國健康照護花費

- 本題承自第1.3 節例題1。由於美國高齡人口快速成長，預期未來幾十年其健康照護花費將明顯增加。下表列出美國2008-2013年的健康照護花費(單位：兆元)，其中t代表年份，起始年($t = 0$) 為2008年，2009 年以後為預估值

年，t	0	1	2	3	4	5
花費，y	2.34	2.47	2.57	2.70	2.85	3.02

試利用最小平方法找出美國健康照護花費的函數。

資料來源：Centers for Medicare & Medicaid Services.