

表 5.6 DiCarlo 汽車日銷售量變異數的計算過程

x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$f(x)$	$(x - \mu)^2 f(x)$
0	$0 - 1.50 = -1.50$	2.25	0.18	$2.25(0.18) = 0.4050$
1	$1 - 1.50 = -0.50$	0.25	0.39	$0.25(0.39) = 0.0975$
2	$2 - 1.50 = 0.50$	0.25	0.24	$0.25(0.24) = 0.0600$
3	$3 - 1.50 = 1.50$	2.25	0.14	$2.25(0.14) = 0.3150$
4	$4 - 1.50 = 2.50$	6.25	0.04	$6.25(0.04) = 0.2500$
5	$5 - 1.50 = 3.50$	12.25	0.01	$12.25(0.01) = 0.1225$

$\sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 f(x) = 1.2500$

變異數

雖然可藉由期望值瞭解隨機變數的平均值，但我們經常也需要衡量隨機變數的分散程度或變異性。就如同在第 3 章用變異數 (variance) 表示一組資料的分散程度，現在我們利用變異數來表達隨機變數的分散程度或變異性，離散隨機變數的變異數的數學公式如下。

變異數是隨機變數與平均數差的平方的加權平均數，權重為機率值。

離散隨機變數的變異數

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 f(x) \quad (5.5)$$

如式 (5.5) 所示，變異數公式的重要部分是離差 $x - \mu$ ，離差是用來衡量任意隨機變數與期望值或平均數 μ 的距離。而變異數的計算是將離差取平方之後再與各隨機變數的機率函數值相乘，最後將各乘積加總即為變異數，記作 $\text{Var}(x)$ 及 σ^2 ，兩者皆可用來表示隨機變數的變異數。

表 5.6 是 DiCarlo 汽車公司日銷售量之機率分配的變異數計算過程。由該表可知其變異數為 1.25。標準差 (standard deviation) 定義為變異數的正平方根，記作 σ 。因此，該汽車公司日銷售數量的標準差為：

$$\sigma = \sqrt{1.25} = 1.118$$

標準差與隨機變數有相同的單位 ($\sigma = 1.118$ 輛)，因此更常被用來衡量隨機變數的變異性。這是因為變異數 σ^2 的單位是衡量單位的平方，在解釋上較為困難。

習題

方法

15. 隨機變數 x 的機率分配如下所示。

x	$f(x)$
3	0.25
6	0.50
9	0.25

SELF test

- a. 計算 x 的期望值 $E(x)$ 。
 b. 計算 x 的變異數 σ^2 。
 c. 計算 x 的標準差 σ 。
16. 隨機變數 y 的機率分配如下所示。

y	$f(y)$
2	0.20
4	0.30
7	0.40
8	0.10

- a. 計算 $E(y)$ 。
 b. 計算 $\text{Var}(y)$ 和 σ 。

應用

17. 義務救難服務隊每天接到的求救電話在 0 通到 5 通之間。求救電話通數的機率分配如下所示。

求救電話通數	機率
0	0.10
1	0.15
2	0.30
3	0.20
4	0.15
5	0.10

- a. 電話通數的期望值為何？
 b. 電話通數的變異數與標準差為何？
18. 美國住屋調查報告提出下列資料，資料中顯示主要城市的自有住宅及出租住宅的臥室數目資料 (www.census.gov, March 31, 2003)。

SELF test

臥室數目	房屋數目 (千戶)	
	出租	自住
0	547	23
1	5012	541
2	6100	3832
3	2644	8690
4 間 (含) 以上	557	3783

- a. 定義隨機變數 x 為出租住宅之臥室數目，請編製此隨機變數的機率分配 [令 $x=4$ 表示擁有 4 間 (含) 以上臥室]。
 b. 請計算 (a) 中隨機變數 x 的期望值及變異數。
 c. 定義隨機變數 y 為自有住宅之臥室數目，請編製此隨機變數的機率分配 [令 $y=4$ 表示擁有 4 間 (含) 以上臥室]。
 d. 請計算 (c) 中隨機變數 y 的期望值及變異數。

e. 比較出租及自有住宅的臥室數目後，請說明你的觀察結果。

19. NBA 會對所屬的每個隊伍提供許多不同的統計數據。其中包括投籃命中率及三分球命中率。2004 年球季，29 支 NBA 球隊的 2 分球命中率是 0.44，3 分球命中率則是 0.34 (www.nba.com, January 3, 2004)。

a. 投 2 分球的期望值為何？

b. 投 3 分球的期望值為何？

c. 如果 2 分球的命中率高於 3 分球，為何教練允許某些球員在有機會時就投 3 分球？請以期望值解釋之。

20. Newton 汽車保險公司的損害保險理賠狀況如下所示。

理賠金額 (\$)	機率
0	0.85
500	0.04
1000	0.04
3000	0.03
5000	0.02
8000	0.01
10000	0.01

a. 利用理賠金額的期望值決定損益兩平的保險費。

b. 保險公司每年收取 \$520 的保費，對投保人而言，其投保損害保險的期望值為何 (提示：保險公司平均理賠金額減投保保費)？為什麼保戶要購買此一保險？

21. 資訊系統 (IS) 資深主管及中階經理工作滿意度分數的機率分配表示如下。分數範圍由最低的 1 分 (非常不滿意) 到最高的 5 分 (非常滿意)。

工作滿意度 分數	機率	
	資訊系統 資深主管	資訊系統 中階經理
1	0.05	0.04
2	0.09	0.10
3	0.03	0.12
4	0.42	0.46
5	0.41	0.28

a. 資深主管工作滿意度分數的期望值為何？

b. 中階經理工作滿意度分數的期望值為何？

c. 計算資深主管和中階經理工作滿意度分數的變異數。

d. 計算兩類員工工作滿意度分數機率分配的標準差。

e. 比較資深主管及中階經理整體工作滿意程度的差異。

22. 某產品的市場需求量每月皆不相同，其需求狀況如下所示。該表是根據過去兩年來每月的市場需求狀況加以彙總而得。

需求量	機率
300	0.20
400	0.30
500	0.35
600	0.15

- a. 若該公司以每月的期望需求量決定生產量，則應生產多少？
- b. 假設每單位產品的售價為 \$70，成本為 \$50。則若公司生產量如 (a) 所示，但實際需求為 300 單位時，該公司賺或賠多少錢？
23. 2002 年紐約市住房及空屋調查顯示，共有 59,234 個出租單位受到房租管制，在房租平穩化規範中的出租單位則有 236,263。這些出租單位內的房客數目的機率分配情形如下 (www.census.gov, January 12, 2004)。

房客人數	房租管制	房租平穩化
1	0.61	0.41
2	0.27	0.30
3	0.07	0.14
4	0.04	0.11
5	0.01	0.03
6	0.00	0.01

- a. 不同形式出租單位的房客數目的期望值是多少？
- b. 不同形式出租單位的房客數目的變異數是多少？
- c. 請對住在不同形式出租單位的房客人數進行比較。
24. J. R. Ryland 電腦公司正考慮一擴廠計畫。該公司負責人必須決定該建中型或大型廠房。由於新產品的需求量並不確定，因此估計其需求為低、中、高的機率分別為 0.20, 0.50 和 0.30。令 x 與 y 分別表示中型及大型規模擴廠之每年利潤 (單位：\$1000)，該公司的規劃分析人員估計不同生產規模下的利潤如下所示。

		中型規模 擴廠之利潤		大型規模 擴廠之利潤	
		x	$f(x)$	y	$f(y)$
需求量	低	50	0.20	0	0.20
	中	150	0.50	100	0.50
	高	200	0.30	300	0.30

- a. 請計算兩種不同擴廠規模下的期望利潤。在期望利潤最大化的考量下，何種擴廠規模較佳？
- b. 請計算兩種不同擴廠規模下的變異數。在風險或不確定情況最小的目標下，何種擴廠規模較佳？



5.4 二項機率分配

二項機率分配為應用相當廣泛的離散機率分配。與此分配有關的多重步驟實