率。由於 15 分鐘內平均來車數為 10 輛，因此每分鐘平均來車數為 10/15＝2/3 輛，而每 3 分鐘平均來車為 $\mu=(2/3)(3\text{ 分鐘})=2$ 輛。因此，3 分鐘內來車 x 輛的機率為：

$$f(x)=\frac{2^x e^{-2}}{x!}$$

欲求 3 分鐘內 1 輛來車的機率，可利用上述公式：

$$3\text{ 分鐘內恰有 1 輛來車的機率}=f(1)=\frac{2^1 e^{-2}}{1!}=0.2707$$

我們曾計算 15 分鐘內有 5 輛來車的機率是 0.0378，請注意這個機率值與 3 分鐘內 1 輛來車的機率 0.2707 並不相同。要計算不同時間區間的卜瓦松機率時，必須先將平均值轉換成新的時間區間的平均值，再計算機率。

一個包含長度或距離區間的例子

以下舉一個非時間區間應用卜瓦松分配的例子。假如我們有興趣的是某一段高速公路路段，經重新鋪設路面一個月後，發現重要瑕疵的數量。假設在此路段的任何兩個區間中，發現一個瑕疵的機率皆相同，且各區間發現瑕疵與否為獨立事件。因此可以應用卜瓦松分配。

假設在重新鋪設路面一個月後，每哩發現重大瑕疵的平均數目為 2 個，則在 3 哩內沒有發現重大瑕疵的機率為何？因為我們有興趣的長度區間為 3 哩，因此 3 哩的平均瑕疵數為 $\mu=(2\text{ 個/哩})(3\text{ 哩})=6$ 個，利用式 (5.11)，$f(0)=6^0e^{-6}=0.0025$，可得 3 哩內沒有重大瑕疵數的機率為 0.0025，表示在 3 哩內沒有重大瑕疵的可能性非常小。事實上，在 3 哩長的路段裡至少有 1 個重大瑕疵的機率為 $1-0.0025=0.9975$。

習　題

方法

38. 考慮一卜瓦松分配，其 $\mu=3$。
    a. 寫出適當的卜瓦松機率函數。
    b. 求 $f(2)$。
    c. 求 $f(1)$。
    d. 求 $P(x\geq 2)$。

SELF test

39. 考慮一卜瓦松分配，單位時間平均發生的次數為 2 次。
    a. 寫出適當的卜瓦松機率函數。
    b. 3 個單位時間的平均發生次數為何？
    c. 寫出 3 個單位時間內發生 x 次的卜瓦松機率函數。
    d. 求出 1 個單位時間內發生 2 次的機率。

e. 求出 3 個單位時間內發生 6 次的機率。

f. 求出 2 個單位時間內發生 5 次的機率。

應用

40. Regional 航空公司的訂位櫃台每小時平均接到 48 通預約電話。
    a. 求 5 分鐘內接到 3 通的機率。
    b. 求 15 分鐘內接到 10 通的機率。
    c. 假設現在沒有電話在等待中，若服務人員花 5 分鐘完成目前這通電話的預約工作，則在該段時間中打電話進來的期望通數為何？在該段時間中沒有電話打進來的機率為何？
    d. 假設現在沒有電話打進來，服務人員也沒有在電話中，請問此時服務人員可以休息 3 分鐘而不被干擾的機率為何？
41. 某大學在電話註冊期間的來電頻率為每 2 分鐘 1 通電話。
    a. 1 小時平均來電數為何？
    b. 5 分鐘來電 3 通的機率為何？
    c. 5 分鐘內沒有任何來電的機率為何？

SELF test

42. 每年有超過 5000 萬遊客利用民宿 (B&Bs) 過夜。每分鐘大約有 7 個人瀏覽北美民宿協會的網頁 (www.bestinns.net)。許多民宿業者透過網頁即可吸引來客 (*Time*, September 2001)。
    a. 請計算 1 分鐘內沒有人瀏覽網頁的機率。
    b. 請計算 1 分鐘內有 2 人 (含) 以上瀏覽網頁的機率。
    c. 請計算 30 秒內有 1 人 (含) 以上瀏覽網頁的機率。
    d. 請計算 1 分鐘內有 5 人 (含) 以上瀏覽網頁的機率。
43. 搭乘飛機的旅客是隨機且獨立地抵達登機門的檢驗區。平均的到達率是每分鐘 10 人。
    a. 請計算 1 分鐘內無人到達的機率。
    b. 請計算 1 分鐘內到達的旅客不超過 3 人的機率。
    c. 請計算 15 秒鐘內無人到達的機率。
    d. 請計算 15 秒鐘內至少 1 人到達的機率。
44. 每年平均發生 15 起飛機意外事故 (*The World Almanac and Book of Facts*, 2004)。
    a. 計算每個月發生飛機意外事故的平均值。
    b. 計算一個月內沒有發生飛機意外事故的機率。
    c. 計算一個月內恰好發生一起飛機意外事故的機率。
    d. 計算一個月內發生一起以上飛機意外事故的機率。
45. 國家安全委員會 (NSC) 的調查報告指出，下班後的意外事故每年造成美國產業生產力的損失高達 \$2000 億 (National Safety Council, March 2006)。根據 NSC 的估計，擁有 50 名員工的企業，每年在下班後發生意外事故的平均人數是 3 人。請針對擁有 50 名員工的企業回答以下問題。

a. 一年內沒有員工在下班後發生事故的機率是多少？

b. 一年內至少兩名員工在下班後發生事故的機率是多少？

c. 六個月內員工在下班後發生事故的人數的期望值是多少？

d. 半年內沒有員工在下班後發生事故的機率是多少？

5.6 超幾何機率分配

超幾何機率分配 (hypergeometric probability distribution) 與二項分配關係相當密切。兩者主要的差別有二，其一是超幾何分配的各試驗並不獨立；再者是超幾何分配成功的機率隨試驗而有不同。

一般在應用超幾何分配時，皆令 r 為母體中成功的個數，而整個母體元素的總數為 N，故失敗的個數為 $N-r$。**超幾何機率函數 (hypergeometric probability function)** 被用來計算 n 個隨機樣本中有 x 個成功、$n-x$ 個失敗的機率。在 n 個樣本中選出 x 個成功個數，這表示要從母體總成功個數 r 中抽出 x 個，從母體總失敗個數 $N-r$ 中抽出 $n-x$ 個。下列的超幾何機率函數可以用來計算 n 個隨機樣本中有 x 個成功個數的機率 $f(x)$。

超幾何機率函數

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad 0 \leq x \leq r \qquad \textbf{(5.12)}$$

其中

$f(x) = n$ 次試驗中 x 次成功的機率
$n =$ 試驗的次數
$N =$ 母體大小
$r =$ 母體中成功的個數

注意 $\binom{N}{n}$ 表示從母體大小為 N 中，選出 n 個樣本的可能組合；$\binom{r}{x}$ 表示從母體總成功個數 r 中，選出 x 個成功個數的可能組合；$\binom{N-r}{n-x}$ 表示從母體總失敗個數 $N-r$ 中，選出 $n-x$ 個失敗個數的可能組合。

現在舉例說明如何利用式 (5.12)，以下是個品管的例子。某家公司生產保險絲， 12 個保險絲包裝成一盒。品管檢驗員隨機從一盒產品中抽出 3 個檢驗。假定該盒恰有 5 個瑕疵品，檢驗員抽出的 3 個保險絲中恰有 1 個是瑕疵品的機率為何？在此例中，$n=3$ 且 $N=12$，每盒裡有 $r=5$ 個瑕疵品，要計算抽出的瑕疵品個數 $x=1$ 的機率，計算公式為：