$$f(1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{7}{2}}{\binom{12}{3}}=\frac{\left(\frac{5!}{1!4!}\right)\left(\frac{7!}{2!5!}\right)}{\left(\frac{12!}{3!9!}\right)}=\frac{(5)(21)}{220}=0.4773$$

假定我們想知道至少有 1 個瑕疵品的機率。最簡單的方式是先算出沒有瑕疵品的機率，$x=0$ 的機率是

$$f(0)=\frac{\binom{5}{0}\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{\left(\frac{5!}{0!5!}\right)\left(\frac{7!}{3!4!}\right)}{\left(\frac{12!}{3!9!}\right)}=\frac{(1)(35)}{220}=0.1591$$

已知沒有瑕疵品的機率 $f(0)=0.1591$，可以求出至少有 1 個瑕疵品的機率是 $1-0.1591=0.8409$。因此，至少發現 1 個瑕疵品的機率很高。

超幾何分配的平均數及變異數的公式如下：

$$E(x)=\mu=n\left(\frac{r}{N}\right) \tag{5.13}$$

$$\text{Var}(x)=\sigma^2=n\left(\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \tag{5.14}$$

保險絲的例子中 $n=3, r=5$ 且 $N=12$，所以，瑕疵品的平均數及變異數是：

$$\mu=n\left(\frac{r}{N}\right)=3\left(\frac{5}{12}\right)=1.25$$

$$\sigma^2=n\left(\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=3\left(\frac{5}{12}\right)\left(1-\frac{5}{12}\right)\left(\frac{12-3}{12-1}\right)=0.60$$

標準差是 $\sigma=\sqrt{0.60}=0.77$。

**評 註**

以 $n$ 個試驗的超幾何分配而言，令 $p=(r/N)$ 表示第一次試驗的成功機率。如果母體很大，式 (5.14) 中的 $(N-n)/(N-1)$ 會接近 1，故期望值與變異數可以寫成 $E(x)=np$ 及 $\text{Var}(x)=np(1-p)$。這也是二項分配的期望值與變異數公式（見式 (5.9) 與式 (5.10)）。總之，在母體很大時，可以用 $n$ 次試驗、每次成功機率 $p=(r/N)$ 的二項分配來求得超幾何分配的近似值。

## 習 題

### 方法

SELF test

46. 假設 $N=10$ 及 $r=3$，計算如下超幾何分配的機率值。
   a. $n=4, x=1$。
   b. $n=2, x=2$。

c. $n=2, x=0$。

d. $n=4, x=2$。

47. 假設 $N=15$ 及 $r=4$，求 $n=10$ 時，$x=3$ 的機率為何？

## 應用

SELF test

48. 蓋洛普機構進行調查，詢問受訪者：「你最喜歡看什麼運動？」美式足球及籃球分居一、二名 (www.gallup.com, January 3, 2004)。假定一個 10 人小組裡，有 7 人最喜歡看美式足球，有 3 人最喜歡看籃球。由其中隨機選出 3 人。
   a. 恰有 2 人最喜歡看美式足球的機率為何？
   b. 樣本中多數人 (2 人或 3 人) 最喜歡看美式足球的機率為何？

49. 在賭城拉斯維加斯，21 點是相當受歡迎的賭局。賭客會拿到兩張牌，人頭牌 (jack, queen 及 king) 及 10 皆計為 10 點，ace 可計為 1 點或 11 點；52 張牌中有 16 張牌可計為 10 點 (jack, queen, king 及 ten)，並且有 4 張 ace。
   a. 請問賭客拿到的兩張牌是 ace 或 10 點牌的機率為何？
   b. 請問賭客拿到的兩張牌皆為 ace 的機率為何？
   c. 請問賭客拿到的兩張牌皆為 10 點的機率為何？
   d. 21 點就是拿到一張 10 點的牌及一張 ace。利用 (a)、(b) 及 (c) 的答案計算一賭客得到 21 點的機率。[提示：(d) 並不是超幾何問題。請思考超幾何分配的邏輯，然後利用 (a)、(b) 及 (c) 的結果回答此問題]。

SELF test

50. Axline 電腦製造公司有兩座工廠，一在德州，一在夏威夷。德州廠有 40 位員工，而夏威夷廠有 20 位員工。從這兩工廠隨機抽出 10 位員工。
   a. 沒有人是來自夏威夷廠的機率為何？
   b. 有 1 位是來自夏威夷廠的機率為何？
   c. 有 2 位 (含) 以上是來自夏威夷廠的機率為何？
   d. 有 9 位是來自德州廠的機率為何？

51. *2003 Zagat Resaurant Survey* 針對美國境內的頂級餐廳提供了食物、裝潢及服務的評比。波士頓名列前茅的 15 家餐廳的晚餐平均價格 (含飲料及小費在內) 是 \$48.60。你計劃前往波士頓，並在 15 家餐廳中的 3 家用晚餐。公司補貼的晚餐費用上限是每餐 \$50。熟悉這些餐廳的助理告訴你，其中有三分之一的餐廳的晚餐價格超過 \$50。假定你隨機挑選 3 家用餐。
   a. 沒有任一家餐廳的價格超過公司補貼上限的機率為何？
   b. 有一家餐廳的價格超過公司補貼上限的機率為何？
   c. 有二家餐廳的價格超過公司補貼上限的機率為何？
   d. 三家餐廳的價格都超過公司補貼上限的機率為何？

52. 一批貨共有 10 件商品，其中有 2 件是不良品，8 件是良品。現在從此批貨品中隨機抽出部分樣本進行檢驗，若發現 1 件不良品，則整批退貨。
   a. 若隨機抽出 3 件當作樣本，請問退貨的機率為何？
   b. 若隨機抽出 4 件當作樣本，請問退貨的機率為何？

c. 若隨機抽出 5 件當作樣本，請問退貨的機率為何？

d. 若一批貨品有 2 件是不良品，而 8 件是良品時，管理者希望拒收此批貨品的機率為 0.90，此時你建議應該抽幾件做樣本？

## 本章摘要

隨機變數是實驗結果的數值描述，而隨機變數的機率分配是用來描述隨機變數的可能值及其對應的機率。對於任何離散隨機變數 $x$，我們以機率函數來定義其機率分配，記作 $f(x)$，此函數提供各隨機變數值的對應機率。一旦定義出機率函數，我們就可以計算該隨機變數的期望值、變異數與標準差。

二項分配可以用來計算 $n$ 次試驗中 $x$ 次成功的機率。所謂二項實驗必須符合下列四個特性：

1. 有 $n$ 個相同的試驗。
2. 每一試驗有兩種可能的實驗結果，一為成功，一為失敗。
3. 每一試驗成功的機率皆為 $p$，失敗的機率皆為 $1-p$。
4. 每一試驗皆獨立。

只要符合上述 4 個條件，就可以利用二項機率函數或二項機率表得到 $n$ 次試驗中 $x$ 次成功的機率值。本章也介紹了二項機率分配的期望值與變異數的公式。

卜瓦松分配則是用來計算某一時間區間 (或空間區間) 中，特定事件發生 $x$ 次的機率。應用卜瓦松分配時，下列兩個假設條件必須成立：

1. 任何相同長度的區間，特定事件發生的機率皆相同。
2. 任何區間中，事件發生或不發生與其他區間中的事件發生與否彼此獨立。

我們在 5.6 節介紹了第三種離散機率分配——超幾何機率分配。與二項機率分配相同的是，這個分配用來計算 $n$ 次試驗中成功 $x$ 次的機率。但與二項機率分配不同的是，每一次試驗的成功機率會隨著試驗而改變。

## 專有名詞

**隨機變數**：實驗結果的數值化描述。

**離散隨機變數**：一隨機變數，其值為有限個，或為無限數列。

**連續隨機變數**：一隨機變數，其值可為某一區間或若干個區間中的任何值。

**機率分配**：描述各隨機變數值出現的機率及其分布情況。

**機率函數**：為一函數，記作 $f(x)$，可提供任何離散隨機變數值所對應的機率 $x$。

**離散型均勻機率分配**：一種機率分配的形式，隨機變數的任一可能值所對應的機率都相等。

**期望值**：用來衡量隨機變數的中央位置。

**變異數**：用來衡量隨機變數的分散程度或變異性。

**標準差**：變異數的正平方根。