連續隨機變數的期望值與變異數的計算和離散隨機變數相類似，但前者的計算包含了微積分的概念，公式的推導將於進階的教科書中再介紹。

本節所介紹的均勻機率分配，其期望值和變異數的公式為：

$$E(x) = \frac{a + b}{2}$$

$$\text{Var}(x) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

在以上公式中，a 為隨機變數的最小值，b 為最大值。

應用這些公式來計算從芝加哥到紐約的飛行時間之均勻分配，我們可以得到：

$$E(x) = \frac{(120 + 140)}{2} = 130$$

$$\text{Var}(x) = \frac{(140 - 120)^2}{12} = 33.33$$

標準差為變異數的正平方根，因此，$\sigma = 5.77$ 分鐘。

評 註

為了更進一步顯現機率密度函數的機率不是高度，可以觀察下列的均勻機率分配：

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

在 x 值為 0 到 0.5 之間的機率密度函數 $f(x)$ 高度為 2，但機率值一定不會大於 1。因此，我們不能視機率密度函數值 $f(x)$ 為機率值 x。

習 題

方法

SELF test

1. 已知隨機變數 x 是介於 1.0 到 1.5 間的均勻分配。
   a. 繪製機率密度函數圖形。
   b. 求 $P(x=1.25)$。
   c. 求 $P(1.0 \leq x \leq 1.25)$。
   d. 求 $P(1.20 < x < 1.5)$。
2. 已知隨機變數 x 在 10 到 20 之間具有均勻分配。
   a. 繪製機率密度函數圖形。
   b. 求 $P(x < 15)$。
   c. 求 $P(12 \leq x \leq 18)$。
   d. 求 $E(x)$。
   e. 求 $\text{Var}(x)$。

應用

3. Delta 航空公司聲稱其飛機由辛辛那提到檀帕的飛行時間為 2 小時又 5 分鐘，假設我們相信實際的飛行時間是介於 2 小時與 2 小時 20 分鐘之均勻分配。
   a. 繪製飛行時間的機率密度函數圖形。
   b. 飛機遲到時間不超過 5 分鐘的機率為何？
   c. 飛機遲到時間超過 10 分鐘的機率為何？
   d. 平均飛行時間為何？

SELF test

4. 大部分的電腦語言皆有產生亂數 (random numbers) 的函數。在微軟的 Excel 中，RAND 函數可以用來產生 0 與 1 之間的亂數。如果 x 表示所產生的亂數，則 x 是個連續隨機變數且具有下列機率密度函數：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

   a. 繪製機率密度函數圖形。
   b. 在 0.25 到 0.75 之間產生亂數的機率為何？
   c. 在小於或等於 0.30 的區域產生亂數的機率為何？
   d. 在大於 0.60 的區域產生亂數的機率為何？
   e. 在 Excel 工作表中以 ＝RAND() 函數在 50 個儲存格產生 50 個亂數。
   f. 計算 (e) 的亂數的平均值及標準差。

5. 根據調查，PGA 的巡迴賽中排名前 100 名的高爾夫球選手的平均擊球距離是 284.7 碼到 310.6 碼 (*Golfweek*, March 29, 2003)，假設選手擊球的距離在此區間內呈均勻分配。
   a. 請以數學公式表示擊球距離的機率密度函數。
   b. 一位選手擊球距離少於 290 碼的機率為何？
   c. 一位選手擊球距離至少 300 碼的機率為何？
   d. 一位選手擊球距離介於 290 碼到 305 碼的機率為何？
   e. 這些選手有多少人擊球距離至少 290 碼？

6. 清潔劑上的標籤顯示重量有 12 盎司，在生產過程中每瓶填充的重量為均勻分配且機率密度函數為：

$$f(x) = \begin{cases} 8 & 11.975 \le x \le 12.100 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

   a. 填充重量在 12 盎司到 12.05 盎司之間的機率為何？
   b. 填充重量等於或大於 12.02 盎司的機率為何？
   c. 品質管制接受在標籤所示重量 ± 0.02 盎司內的產品，則一瓶清潔劑未能符合品管標準的機率為何？

7. 假設我們現在想要購買一塊地，而且我們也知道有其他競爭者，* 地主宣稱出價

* 此練習題由西北大學 Roger Myerson 教授提供。

超過 $10,000 的最高價者就可得標。假設競爭者的出價 x 是一個隨機變數且為介於 $10,000 與 $15,000 之間的均勻分配。

a. 假設你出價 $12,000，得標的機率為何？

b. 假設你出價 $14,000，得標的機率為何？

c. 你要出價多少才能使你得標的機會為最大？

d. 假設你知道有人願意以 $16,000 再買你這塊地，你在此時的出價會小於 (c) 嗎？為什麼？

6.2 常態機率分配

法國數學家 Abraham de Moivre 於 1733 年出版 *The Doctrine of Chances* 一書，他導出常態分配。

常態機率分配 (normal probability distribution) 可以說是描述連續隨機變數最重要的機率分配。常態分配的運用範圍很廣，諸如身高、體重、測驗的分數、科學測量、降雨量等等的數據。統計推論中也廣泛地使用常態分配，這也是本書接下來要介紹的主要重點。在統計推論中，可以利用常態分配來描述抽樣得到的結果。

常態曲線

常態機率分配的形狀如圖 6.3 所示為一「鐘形」曲線，此鐘形曲線的機率密度函數定義如下。

常態機率密度函數

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{6.2}$$

其中

μ＝平均數

σ＝標準差

π＝3.14159

e＝2.71828

圖 6.3 常態分配之鐘形曲線