

我們要找的保證哩程數是平均值以下 1.28 個標準差，因此 $x = \mu - 1.28\sigma$ 。

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \mu}{\sigma} = -1.28 \\ x - \mu &= -1.28\sigma \\ x &= \mu - 1.28\sigma \end{aligned}$$

又 $\mu = 36,500$ 且 $\sigma = 5,000$

$$x = 36,500 - 1.28(5,000) = 30,100$$

哩程保證若設定在 30,000 哩，則將有接近 9.68% 的輪胎未達到此標準。

因此，哩程標準訂在 30,100 哩，約有 10% 的輪胎未達到此保證哩程數，或許 Grear 公司會根據此項資訊而將哩程保護訂在 30,000 哩。

在此我們可以看到，機率分配在提供決策參考資訊時所扮演的重要角色。也就是說，一旦一個特定個案可以建立其機率分配，將可快速且簡便地獲得有關的機率值。機率並不直接提供決策建議，但它可提供決策者瞭解問題的風險和不確定性，此資訊則可協助決策者制定良好的決策。

習題

方法

8. 請參照圖 6.4 畫出具有平均數 $\mu = 100$ 與標準差 $\sigma = 10$ 的常態曲線，並在水平軸上標示 70, 80, 90, 100, 110, 120 和 130 等值。
9. 某隨機變數是平均數為 $\mu = 50$ 及標準差為 $\sigma = 5$ 的常態分配。
 - a. 繪製該機率密度函數的常態曲線，並在橫軸上標示 35, 40, 45, 50, 55, 60 與 65 等值。圖 6.4 顯示平均數上下 3 個標準差位置的常態曲線幾乎接近水平軸（在此即指 35 與 65 兩點的情況）。
 - b. 隨機變數值介於 45 到 55 的機率為何？
 - c. 隨機變數值介於 40 到 60 的機率為何？
10. 繪製標準常態分配圖，並在水平軸上標示 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 等值，再利用標準常態分配表計算下列機率值。
 - a. $P(z \leq 1.5)$ 。
 - b. $P(z \leq 1)$ 。
 - c. $P(1 \leq z < 1.5)$ 。
 - d. $P(0 < z < 2.5)$ 。
11. 已知 z 為標準常態隨機變數，計算下列機率值。
 - a. $P(z \leq 1.0)$ 。
 - b. $P(z \geq -1)$ 。
 - c. $P(z \geq -1.5)$ 。
 - d. $P(-2.5 \leq z)$ 。
 - e. $P(-3 < z \leq 0)$ 。

SELF test

12. 已知 z 為標準常態隨機變數，計算下列機率值。

- $P(0 \leq z \leq 0.83)$ 。
- $P(-1.57 \leq z \leq 0)$ 。
- $P(z > 0.44)$ 。
- $P(z \geq -0.23)$ 。
- $P(z < 1.20)$ 。
- $P(z \leq -0.71)$ 。

13. 已知 z 為標準常態隨機變數，計算下列機率值。

- $P(-1.98 \leq z \leq 0.49)$ 。
- $P(0.52 \leq z \leq 1.22)$ 。
- $P(-1.75 \leq z \leq -1.04)$ 。

14. 已知 z 為標準常態隨機變數，求以下情況的 z 值。

- z 值的左邊面積為 0.9750。
- 落於 0 與 z 值之間的面積為 0.4750。
- z 值的左邊面積為 0.7291。
- z 值的右邊面積為 0.1314。
- z 值的左邊面積為 0.6700。
- z 值的右邊面積為 0.3300。

SELF test

15. 已知 z 為標準常態隨機變數，求下列各情況下的 z 值。

- z 值的左邊面積為 0.2119。
- 介於 $-z$ 值到 z 值的面積為 0.9030。
- 介於 $-z$ 值到 z 值的面積為 0.2052。
- z 值的左邊面積為 0.9948。
- z 值的右邊面積為 0.6915。

16. 已知 z 為標準常態隨機變數，求下列各情況的 z 值。

- z 值的右邊面積為 0.01。
- z 值的右邊面積為 0.025。
- z 值的右邊面積為 0.05。
- z 值的右邊面積為 0.10。

應用

17. 對信用狀況良好的借款人而言，分期付款的平均借款金額是 \$15,015

(*BusinessWeek*, March 20, 2006)。假定標準差是 \$3540，借款金額是常態分配。

- 隨機選擇一位信用狀況良好的借款人，借款金額超過 \$18,000 的機率為何？
- 隨機選擇一位信用狀況良好的借款人，借款金額少於 \$10,000 的機率為何？
- 隨機選擇一位信用狀況良好的借款人，借款金額介於 \$12,000 到 \$18,000 之間的機率為何？
- 隨機選擇一位信用狀況良好的借款人，借款金額不超過 \$14,000 的機率為何？

SELF test

何？

18. 名列 S&P 500 的企業其平均股價為 \$30，標準差為 \$8.20 (*BusinessWeek*, Special Annual Issue, Spring 2003)。假定股價是常態分配。
 - a. 企業的股價至少為 \$40 的機率為何？
 - b. 企業的股價不足 \$20 的機率為何？
 - c. 企業的股價必須是多少才能排名在前 10%？
19. 美國德州達拉斯市 4 月的平均降雨量是 3.5 吋 (*The World Almanac*, 2000)。假定月降雨量是常態分配，標準差是 0.8 吋。
 - a. 4 月降雨量超過 5 吋的機率是多少？
 - b. 4 月降雨量低於 3 吋的機率是多少？
 - c. 月降雨量若是落在機率分配的前 10%，該月份就被歸類為「濕度極高」。如果 4 月份被歸類為「濕度極高」的月份，降雨量至少是多少？
20. 2003 年 1 月，美國勞工登入網際網路的平均時間為 77 小時 (CNBC, March 15, 2003)。假定登入網際網路的時間呈常態分配，標準差是 20 小時。
 - a. 2003 年 1 月隨機選擇一位勞工，其登入網際網路時間少於 50 小時的機率是多少？
 - b. 2003 年 1 月勞工登入網際網路時間大於 100 小時的機率是多少？
 - c. 2003 年 1 月勞工登入網際網路時間若位於機率分配的前 20% 即被認為重度使用者。一位勞工登入網際網路的時間至少是多少，才會被認為重度使用者？
21. Mensa 是一個由高智商人士所組成的國際性社團，要成為其會員，IQ 測驗的成績要在前 2% (*US Airways Attaché*, September 2000)。如果 IQ 成績呈常態分配且平均數為 100、標準差為 15，請問 IQ 多少才有資格取得 Mensa 的會員資格？
22. 美國中北部地區的財務經理的平均時薪是 \$32.62，標準差是 \$2.32 (Bureau of Labor Statistics, September 2005)。假定薪資是常態分配。
 - a. 財務經理的時薪介於 \$30 至 \$35 的機率是多少？
 - b. 如果時薪要排名在前 10%，必須是多少？
 - c. 隨機選擇一名財務經理，時薪在 \$28 以下的機率是多少？
23. 大學某課程學生答完期末考試题目的時間呈常態分配，平均數為 80 分鐘，標準差為 10 分鐘，請問：
 - a. 在一個小時內答題完畢的機率為何？
 - b. 學生會在 60 分鐘到 75 分鐘內答題完畢的機率為何？
 - c. 假設共有 60 位學生，而考試時間為 90 分鐘，則有多少學生不能在此時間內完成考試？
24. 紐約證交所的每日交易尖峰時段是開盤後半小時及收盤前半小時。某 13 個交易日的開盤後半小時交易量 (單位：百萬股) 如下 (*Barron's*, January 23, 2006; February 13, 2006; February 27, 2006)。

214	163	265	194	180
202	198	212	201	
174	171	211	211	

交易量的機率分配接近常態。

a. 以上述資料算出平均數及標準差作為母體平均數及標準差的估計值。

b. 某交易日的成交量不足 1 億 8 千萬股的機率為何？

c. 成交量超過 2 億 3 千萬股的機率為何？

d. 如果交易所打算在成交量排名前 5% 的交易日發布訊息，這個成交量至少為何？

25. 睡眠基金會指出，晚上平均睡眠時間是 6.8 小時 (*Fortune*, March 20, 2006)。假定睡眠時間是常態分配，標準差是 0.6 小時。

a. 隨機選擇一人，其睡眠時間超過 8 小時的機率為何？

b. 隨機選擇一人，其睡眠時間不到 6 小時的機率為何？

c. 隨機選擇一人，其睡眠時間介於 7 小時到 9 小時的機率為何？有多少比例的人口的睡眠時間介於 7 小時到 9 小時？



6.3 二項機率的常態分配近似值

5.4 節曾介紹離散二項分配。二項實驗包括 n 個相同的獨立試驗，每個試驗都有 2 種可能的結果，即成功或失敗。每次試驗成功的機率在不同試驗中是維持不變的，以 p 表示。二項隨機變數則是 n 個試驗中成功的次數，二項機率關心的是 n 個試驗中成功次數 x 的機率。

如果試驗的次數很大，不論是用手算或是使用計算機，要求得二項機率函數的計算都很困難。在 $np \geq 5$ 及 $n(1-p) \geq 5$ 時，使用常態分配可很容易地求出二項分配的近似值，我們令 $\mu = np$ 及 $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ 來定義常態曲線。

我們以下列例子說明如何以常態分配求二項機率的近似值。假定有一家公司根據過去的資料發現，有 10% 的發票會出現錯誤。如果以 100 張發票為樣本，要計算 12 張發票有錯誤的機率。也就是說，我們想找出 100 次試驗中，12 次成功的機率。我們令 $\mu = np = (100)(0.1) = 10$ 及 $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{(100)(0.1)(0.9)} = 3$ 。 $\mu = 10$ 及 $\sigma = 3$ 的常態分配見圖 6.8。

欲求連續機率分配的機率值，必須算出機率密度函數下方的圖形面積。因此，任一特定隨機變數值的機率為 0。所以，要以常態近似法求出 12 次成功的二項機率近似值，要求算的是介於 11.5 到 12.5 之間的常態曲線下方面積。而我們稱由 12 加減的 0.5 為**連續校正因子 (continuity correction factor)**。因為要以連續分配來近似離散分配的值，因此要以連續校正因子校正之。所以，離散二項分配的機率值 $P(x=12)$ 可以利用連續常態分配的 $P(11.5 \leq x \leq 12.5)$ 來近似之。

將常態分配轉換為標準常態分配，以計算 $P(11.5 \leq x \leq 12.5)$ 。我們可以利用下列的式子：