

連續指數機率分配與離散卜瓦松分配是彼此相關的。如果卜瓦松分配適合用來表示某一區間內的事件發生次數的機率，指數分配就可以描述二次事件發生的時間間隔的機率。

若汽車到達呈卜瓦松分配，到達的間隔時間將呈現指數分配。

為了說明這種關係，我們假設洗車場的來車數量呈卜瓦松機率分配，平均每小時 10 輛汽車，則以 x 表示到達車數的卜瓦松機率函數將是

$$f(x) = \frac{10^x e^{-10}}{x!}$$

由於平均到達車數為每小時 10 輛，則連續到達的 2 輛汽車之間的時間間隔為

$$\frac{1 \text{ 小時}}{10 \text{ 輛車}} = 0.1 \text{ 小時/車}$$

因此，對應的指數分配是平均數為 $\mu = 0.1$ 小時/車；而指數機率密度函數為

$$f(x) = \frac{1}{0.1} e^{-x/0.1} = 10e^{-10x}$$

評註

如圖 6.10 所示，指數分配是右偏分配。事實上，指數分配的偏度是 2。指數分配恰好可以讓我們瞭解嚴重右偏的資料分配的形狀。

習題

方法

32. 已知指數機率密度函數為

$$f(x) = \frac{1}{8} e^{-x/8} \quad x \geq 0$$

- 求 $P(x \leq 6)$ 。
- 求 $P(x \leq 4)$ 。
- 求 $P(x \geq 6)$ 。
- 求 $P(4 \leq x \leq 6)$ 。

33. 已知指數機率密度函數為

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-x/3} \quad x \geq 0$$

- 寫出 $P(x \leq x_0)$ 的公式。
- 求 $P(x \leq 2)$ 。
- 求 $P(x \geq 3)$ 。
- 求 $P(x \leq 5)$ 。

SELF test

- e. 求 $P(2 \leq x \leq 5)$ 。

應用

34. 在機場通過安全檢查所耗用時間已成為旅客困擾。辛辛那提／北肯德基國際機場的尖峰時段，旅客平均等候時間是 12.1 分鐘 (*The Cincinnati Enquirer*, February 2, 2006)。假定通過安全檢查所需時間為指數分配。
- 尖峰時段通過安全檢查所需時間不超過 10 分鐘的機率是多少？
 - 尖峰時段通過安全檢查所需時間超過 20 分鐘的機率是多少？
 - 尖峰時段通過安全檢查所需時間介於 10 分鐘到 20 分鐘的機率是多少？
 - 假定尖峰時段的早上 8 時，你剛開始排隊等候安全檢查，你必須在 30 分鐘之內到達登機門。假定安全檢查結束到登機門需 12 分鐘，你趕不上飛機的機率是多少？

SELF test

35. 在某一十字路口，車輛到達的間隔時間呈指數分配且平均數為 12 秒。
- 繪出此指數機率分配。
 - 車輛到達的間隔時間少於 (含) 12 秒的機率為何？
 - 車輛到達的間隔時間少於 (含) 6 秒的機率為何？
 - 車輛到達的間隔時間會超過 (含) 30 秒的機率為何？
36. 某電子設備的壽命 (小時) 是一個具有下列指數機率密度函數的隨機變數。

$$f(x) = \frac{1}{50} e^{-x/50} \quad x \geq 0$$

- 電子設備的平均壽命為何？
 - 電子設備在前 25 小時運轉失敗的機率為何？
 - 電子設備能持續運轉 100 小時 (含) 以上才故障的機率為何？
37. Sparagowski & Associates 對速食店的得來速購餐車道進行研究。結果顯示，麥當勞的得來速由點餐到取餐的服務時間共需 2.78 分鐘 (*The Cincinnati Enquirer*, July 9, 2000)。諸如此類等待時間常常都是指數分配。
- 顧客服務時間超過 2 分鐘的機率為何？
 - 顧客服務時間超過 5 分鐘的機率為何？
 - 顧客服務時間超過 2.78 分鐘的機率為何？
38. 工作時受到干擾降低你的效率嗎？加州大學爾灣分校的研究指出，商務人士每小時內約被干擾 $5\frac{1}{2}$ 次 (*Fortune*, March 20, 2006)。假定受到干擾的次數是卜瓦松機率分配。
- 請說明兩次干擾的間隔時間之機率分配。
 - 對某商務人士而言，15 分鐘內都沒有受到干擾的機率是多少？
 - 對某商務人士而言，下一次的干擾會在 10 分鐘內發生的機率是多少？